数学分析 B2 笔记

吴越 John
pilotjohnwu@mail.ustc.edu.cn

2021 年 2 月 25 日

目录

第一部分

数学分析 B2 习题

第九章　多变量函数微分学

9.1　多变量函数及其连续性

9.1.1　证明：$(A\ B)^c = A^c\ B^c\ (A\ B)^c = A^c\ B^c$.

证明：把 $\mathbb{R}^2$ 划分为不相交的 4 个集合：$A\ B\ A^c\ B\ A^c\ B^c\ A\ B^c$，且 $(A\ B)\ (A^c\ B)\ (A^c\ B^c)\ (A\ B^c) = \mathbb{R}^2$

则 $(A\ B)^c = (A^c\ B)\ (A^c\ B^c)\ (A\ B^c) = A^c\ B^c$，$(A\ B)^c = ((A\ B)\ (A^c\ B)\ (A\ B^c))^c = A^c\ B^c$

9.1.2　证明：两个开集的交集和并集仍是开集，两个闭集的交集和并集仍是闭集.

证明：设 $A, B \in \mathbb{R}^2$ 为开集，则 $\forall P \in A\ \exists r_{PA}\ 0$，使 $B(P, r_{PA}) \subset A\ \forall P \in B\ \exists r_{PB}\ 0$，使 $B(P, r_{PB}) \subset B$.

$\forall P \in A\ B$ 取 $r_{P,A\ B} = min\{r_{PA}, r_{PB}\}\ 0$，使 $B(P, r_{P,A\ B}) \in A\ B \implies$ 两个开集的交集仍是开集.

$\forall P \in A\ B$ 取 $r_{P,A\ B} = min\{r_{PA}, r_{PB}\}\ 0$，使 $B(P, r_{P,A\ B}) \in A\ B \implies$ 两个开集的并集仍是开集.

设 $A, B \in \mathbb{R}^2$ 为闭集，则 A^c, B^c 为开集，由上一题知 $(A\ B)^c = A^c\ B^c\ (A\ B)^c = A^c\ B^c$，且 $A^c\ B^c, A^c\ B^c$ 均为开集，于是 $A\ B, A\ B$ 均为闭集

9.1.3　证明满足 $y > ax + b$ 的所有点 (x, y) 是一个开集，在坐标轴上画出它的范围，并求它的边界点应满足的关系.

证明：在 $\mathbb{R}^2$ 上，满足 $y\ ax + b$ 的点 $P(x, y)$ 到直线 $l : y = ax + b$ 的距离为：$d_P = \frac{|y-ax+b|}{\sqrt{a^2+1}}$，设 $D = \{(x, y)|y\ ax + b\}$

$\forall P \in D$，取 $r_P \in (0, d_P)$，则 $B(P, d_P) \in D \implies D$ 为开集.

边界点 $Q(x, y)$ 满足：$\forall r\ 0\ B(Q, r)\ D \neq \varnothing\ B(Q, r)\ D^c \neq \varnothing$，则边界点在直线 $l : y = ax + b$ 上，边界点的全体为 $\{(x, y)|y = ax + b\}$

9.1.4　设 $lim_{n\to\infty} M_n = M_0\ lim_{n\to\infty} M'_n = M'_0$，求证：$lim_{n\to\infty}\rho(M_n, M'_n) = \rho(M_0, M'_0)$.

证明：设 $M_n = (x_n, y_n)\ M_0 = (x_0, y_0)\ M'_n = (x'_n, y'_n)\ M'_0 = (x'_0, y'_0)$. 则 $lim_{n\to\infty} x_n = x_0\ lim_{n\to\infty} y_n = y_0\ lim_{n\to\infty} x'_n = x'_0\ lim_{n\to\infty} y'_n = y'_0$，则 $lim_{n\to\infty}\rho(M_n, M'_n) = lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} = \sqrt{(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2} = \rho(M_0, M'_0)$

9.1.10　设 $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f(1, 1), f(y, x), f(1, \frac{y}{x}), f(u, v), f(\cos t, \sin t)$.

解：$f(1, 1) = 1\ f(y, x) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\ f(1, \frac{y}{x}) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\ f(u, v) = \frac{2uv}{u^2+v^2}\ f(\cos t, \sin t) = \sin(2t) f(\cos t, \sin t)$

9.1.12　设 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 (x \neq 0)$，求 $f(2, 3), f(x, y)$.

解：令 $\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{y}{x} = 3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$，于是 $f(2, 3) = -2$

令 $\begin{cases} x = u + v \\ y = \frac{u}{v} \end{cases}$ $(v \neq 0)$，解得 $\begin{cases} u = \frac{xy}{y+1} \\ v = \frac{x}{y+1} \end{cases}$ 则：$f(x, y) = f(u + v, \frac{u}{v}) = u^2 - v^2 = \frac{x^2(y-1)}{y+1}$

9.1.14　判断下列各题极限是否存在，若有极限，求出其极限：

(5)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

解：

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0\ \forall(x,y)\ x^2+y^2=\rho^2\in(0,\delta)\ \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{2\rho^3}{\rho^2}<\varepsilon$$

$$\implies\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

(7)

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

解：

$$x,y>0\ 0<(x^2+y^2)e^{-(x+y)}<\frac{x^2+y^2}{1+x+y+\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{6}}<6\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\leqslant\frac{12}{x+y}$$

又：

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{12}{x+y}=0$$

$$\implies\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$$

(10)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$$

解：令 $y=mx^2-x\ m\neq 0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{mx^3-x^2+1}-1}{mx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3-x^2}{2mx^2}=\frac{-1}{2m}$$

则 m 取不同值时，极限值不同，因此 $(0,0)$ 处极限不存在

9.1.17　研究下列函数的连续性：

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

解：显然 $f(x,y)$ 在满足 $y\neq 0$ 的点上都是连续，下考虑在点 $(x_0,0)$ 的极限：

当 $x_0\neq 0$ 时，取 $x=x_0$，由 $\lim\limits_{y\to 0}x_0\sin\frac{1}{y}$ 不存在，所以在 $(x_0,0)$ 处极限不存在

当 $x_0=0$ 时，取 $y=x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\neq f(0,0)$

因此，$f(x,y)$ 在满足 $y\neq 0$ 的点连续，在满足 $y=0$ 的点不连续

(3)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解：$f(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 的点上连续，则只需考虑 (0,0) 处的连续性.

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{x^2|y|}{2|xy|}=\frac{|x|}{2}\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{|x|}{2}=0$$

$$\Longrightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$$

因此 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续

9.1.18　证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 沿着过此点的每一射线 $x=t\cos\alpha\ y=t\sin\alpha\ (0\leqslant t<+\infty)$ 连续，即 $\lim\limits_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$. 但此函数在点 $(0,0)$ 并不连续.

证明：

$$\lim_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+sin^2\alpha}=0=f(0,0)$$

取 $y=x^2$ 上的点，则 $f(x,x^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，因此在 (0,0) 处不连续

9.1.22　设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$x=x(u,v)\ y=y(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明复合函数 $f(x(u,v),y(u,v))$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续.

证明：

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall(x,y):d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\quad|f(x,y)-f(x_),y_0)|<\varepsilon$$

$$\delta>0\ \exists\delta'>0\ \ \forall(u,v):d((u,v),(u_0,v_0))<\delta'\quad|x(u,v)-x(u_0,v_0)|<\frac{\delta}{2}$$

$$\delta>0\ \exists\delta''>0\ \ \forall(u,v):d((u,v),(u_0,v_0))<\delta'\quad|y(u,v)-y(u_0,v_0)|<\frac{\delta}{2}$$

$\delta_0=min\{\delta',\delta''\},\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0\ \forall(u,v):d((u,v),(u_0,v_0))<\delta_0,$
$|f(x(u,v),y(u,v))-f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))|<\varepsilon$. 即为 $f(x(u,v),y(u,v))$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续.

9.2　多变量函数的微分

9.2.1　Jacobi 矩阵与一阶微分形式不变性

定义 9.1: Jacobi 矩阵

设映射 $\Phi:(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mapsto(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，假设映射都是可微的，那么，记矩阵

$$\boldsymbol{J}(\Phi)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}$$

为映射 Φ 的 Jacobi 矩阵。

特别地，当 $m=n$ 时，可以定义映射 Φ 的 Jacobi 行列式：

$$\frac{\partial(_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}=\det\boldsymbol{J}(\Phi)$$

推论 9.1: Jacobi 矩阵与微分

设映射：$\Phi:(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mapsto(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，假设映射都是可微的，那么，映射的微分在形式上可以写成：

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}f_1\\\mathrm{d}f_2\\\vdots\\\mathrm{d}f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial f_n}{\partial x_1}&\frac{\partial f_n}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\\mathrm{d}x_2\\\vdots\\\mathrm{d}x_m\end{pmatrix}$$

记 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}=(\mathrm{d}f_1,\mathrm{d}f_2,\cdots,\mathrm{d}f_n)^T,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_m)^T$，于是可以记为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{J}(\Phi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

定理 9.1: 复合映射与 Jacobi 矩阵乘法

设复合映射：$(x_1,x_2,\cdots,x_m)\xrightarrow{\Phi}(u_1,u_2,\cdots,u_m)\xrightarrow{\Psi}(f_1,f_2,\cdots,f_p)$，假设映射都是可微的，那么：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial f_p}{\partial x_1}&\frac{\partial f_p}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_p}{\partial x_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}&\frac{\partial f_1}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial u_n}\\\frac{\partial f_2}{\partial u_1}&\frac{\partial f_2}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial u_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial f_p}{\partial u_1}&\frac{\partial f_p}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial f_p}{\partial u_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial u_1}{\partial x_m}\\\frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial u_2}{\partial x_m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial u_n}{\partial x_1}&\frac{\partial u_n}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}$$

也即：

$$\boldsymbol{J}(\Psi\circ\Phi)=\boldsymbol{J}(\Psi)\,\boldsymbol{J}(\Phi)$$

推论 9.2: 复合映射的微分与 Jacobi 矩阵

设复合映射：$(x_1,x_2,\cdots,x_m)\xrightarrow{\Phi}(u_1,u_2,\cdots,u_m)\xrightarrow{\Psi}(f_1,f_2,\cdots,f_p)$，假设映射都是可微的，那么：

$$\boldsymbol{J}(\Psi)\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}f=\boldsymbol{J}(\Psi\circ\Phi)\mathrm{d}x=\boldsymbol{J}(\Psi)\boldsymbol{J}(\Phi)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

也即：一阶微分具有形式不变性。

由 Binet-Cauchy 公式，易知：当 $m=n=p$ 时，有等式：

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}$$

定理 9.2: 坐标变换与 Jacobi 行列式

设映射：$\Phi:(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，于是 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维有向体积元为：

$$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\mathrm{d}\xi_1\wedge\mathrm{d}\xi_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_n$$

定理 9.3: 隐函数的微分

设函数族：$\{f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n),\,i=1,2,\cdots,p\}$，假设在某一个局部区域上，上述函数组可微。假设方程组 $\{f_i=0|1\leqslant i\leqslant p\}$ 决定了隐函数族 $\{y_i(x_1,x_2,\cdots,x_m),\,i=1,2,\cdots,n\}$，于是，对 $x_i,\,i=1,2,\cdots,m$ 求偏导数得：

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=0,\,i=1,2,\cdots,p,\,j=1,2,\cdots,m$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \frac{\partial f_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

由线性方程组解的结构知，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{p\times n}$ 的解的情况是：

$$\begin{cases} \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} > \operatorname{rank}\boldsymbol{A}, & \text{无解} \\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n, & \text{有唯一解} \\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}, & \text{有无穷个解} \end{cases}$$

由假设，我们仅考虑 * 方程族唯一解的情况。此时，不妨设 $p=n$，于是：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \frac{\partial f_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

此时，解存在且唯一的充要条件是 $\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\neq 0$ 在题设区域中成立。

9.2.1(2)　设 $f(x,y)=\sin x^2y$，求 $f'_x(1,\pi)$.

解：

$$f'_x(1,\pi)=2x\cos x^2y\big|_{(1,\pi)}=-2$$

9.2.2　求下列各函数对于每个自变量的偏微商

(6) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$$

(8) $u=xe^{-z}+\ln(x+\ln y)+z$

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-z}+\frac{1}{x+\ln y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{xy+y\ln y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-xe^{-z}+1$$

9.2.3　设 $f(x,y)=\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.

解：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2\sin x^2y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sin x^2y}{y}$$

9.2.4　设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，考察函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的偏导数.

解:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y^2}$$

9.2.5　证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在.

证明:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} z=\lim_{\rho\to 0^+}\rho=0\implies z$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{z}{x}=1\neq -1=\lim_{x\to 0^-}\frac{z}{x}\implies\quad x$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{z}{y}=1\neq -1=\lim_{y\to 0^-}\frac{z}{y}\implies\quad y$$

9.2.9　在下列各题中，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(3) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+2xy^2}{y^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{y^2}$$

(5) $z=y^{lnx}$

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^{\ln y-1}\ln y,\frac{\partial z}{\partial y}=y^{\ln x-1}\ln x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^{\ln x\ln y}}{x^2}(\ln y-1)\ln y,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+\ln x\ln y)\frac{e^{\ln x\ln y}}{xy},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{\ln x\ln y}}{y^2}(\ln x-1)\ln x$$

9.2.10　设 $u=e^{xyz}$，求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z},\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$.

解:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xye^{xyz},\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xe^{xyz}(1+xyz),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2z^2e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)e^{xyz},\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=xz^2(2+xyz)e^{xyz}$$

9.2.11 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明当 $r\neq 0$ 时有：

(1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$

证明：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sum_{cyc}\frac{y^2+z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

(2) $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}$

证明：

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\sum_{cyc}\frac{y^2+z^2-x^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}$$

(3) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}=0$

证明：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{cyc}(\frac{3x^2}{r^2}-1)=0$$

9.2.12 设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

证明函数的二阶偏导数存在，但所有二阶偏导数（特别是两个混合偏导数）在 $(0,0)$ 不连续，且 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$（这个例子说明，在函数在一点分别对 x,y 求导的次序不能交换，其原因时不连续引起的）.

证明：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=0,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}=0$$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{4x^3y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$$

在 $(0,0)$ 处：

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{x^4}}{x}=1,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y^5}{y^4}}{y}=-1$$

则 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$，接下来再证明 $(0,0)$ 处所有二阶导不连续：取 $y=kx$，则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{4k^3(3k^2-1)}{(k^2+1)^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{4k(k^2-3)}{(k^2+1)^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{(1-k^2)(k^4+10k^2+1)}{(k^2+1)^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{(1-k^2)(k^4+10k^2+1)}{(k^2+1)^3}$$

均与 k 的取值有关，因此 $(0,0)$ 处不连续.

9.2.14　设 f 和 g 是两个可微函数，利用微分的定义和定理 9.14，

证明：$\mathrm{d}(fg)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g$.

证明：设 (x,y) 处 $\mathrm{d}f(\Delta x,\Delta y)=a_1\Delta x+b_1\Delta y$ $\mathrm{d}g(\Delta x,\Delta y)=a_2\Delta x+b_2\Delta y$.

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)g(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)g(x,y)$$

$$=f(x+\Delta x,y+\Delta y)(g(x+\Delta x,y+\Delta y)-g(x,y))+(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y))g(x,y)$$

$$=f(x+\Delta x,y+\Delta y)(a_2\Delta x+b_2\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})+g(x,y)(a_1\Delta x+b_1\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$=f(x,y)(a_2\Delta x+b_2\Delta y)+g(x,y)(a_1\Delta x+b_1\Delta y)$$

$$+(a_1\Delta x+b_1\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})(a_2\Delta x+b_2\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})+(f(x,y)+g(x,y))o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

略去高阶小量，则：

$$\mathrm{d}(fg)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g$$

9.2.23　求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $(1,1,-1)$ 的梯度和最大方向微商.

解：

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=(2x+y+3,4y+x-2,6z-6)$$

$$\nabla u|_{(1,1,-1)}=(6,3,-12)$$

设方向向量为：$\boldsymbol{e}=(\cos\phi\sin\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)$ $|\boldsymbol{e}|=1$，方向微商：

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}(1,1,-1)=(6,3,-12)\cdot\boldsymbol{e}\leqslant\sqrt{6^2+3^2+12^2}=3\sqrt{21}$$

当且仅当 $\boldsymbol{e}$ 与 $(6,3,-12)$ 同向时取等，此时 $\boldsymbol{e}=(\frac{2\sqrt{21}}{21},\frac{\sqrt{21}}{21},-\frac{4\sqrt{21}}{21})$

9.2.24　设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $r=|\boldsymbol{r}|$，试求 (1) $\nabla\frac{1}{r^2}$，(2) $\nabla\ln r$.

(1)

解：

$$\nabla\frac{1}{r^2}=(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k})\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{-2x\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-2\boldsymbol{r}}{r^4}$$

(2)

解：

$$\nabla\ln r=(\frac{\partial}{2\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{2\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{2\partial z}\boldsymbol{k})\ln(x^2+y^2+z^2)=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

9.2.26　设 $z=f\,(xy)$ f 为可微函数.

证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial y}=xy-xy=0$$

9.2.28 证明函数 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi\left(x-at\right)}{\partial(x-at)}\frac{\partial(x-at)}{\partial t}+\frac{\partial\psi\left(x+at\right)}{\partial(x+at)}\frac{\partial(x+at)}{\partial t}\right)=a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi\left(x+at\right)}{\partial(x+at)}-\frac{\partial\varphi\left(x-at\right)}{\partial(x-at)}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2\psi\left(x+at\right)}{\partial\left(x+at\right)^2}+\frac{\partial^2\varphi\left(x+at\right)}{\partial\left(x+at\right)^2}\right)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9.2.29 若 $u=F\left(x,y\right)$ F 的任意二阶偏导存在，而 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$.

证明：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

9.2.30 试证：方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 经变化 $\xi=x+y,\eta=3x-y$ 后变成：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0$（其中二阶偏导均连续）.

证明：

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)-3\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

$$+2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+6\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+3\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(3\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)-3\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+6\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

由于二阶偏导数均连续，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}$，则：

$$=16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+8\frac{\partial u}{\partial\xi}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$$

9.2.32 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. 求常数 a.（其中二阶偏导数均连续）

证明：对于 z: $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial u},\dfrac{\partial}{\partial y}=-2\dfrac{\partial}{\partial u}+a\dfrac{\partial}{\partial v}$，因此：

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$
=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(6\frac{\partial}{\partial u}+6\frac{\partial}{\partial u}-2\frac{\partial}{\partial u}+a\frac{\partial}{\partial v}\right)z-\left(-2\frac{\partial}{\partial u}+a\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-2\frac{\partial}{\partial u}+a\frac{\partial}{\partial v}\right)z
$$

$$
=\left(a+6-a^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+(5a+10)\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}
$$

$$
\Longrightarrow\begin{cases}a+6-a^2=0\\ 5a+10\neq 0\end{cases}\Longrightarrow a=3
$$

9.2.33　求方程 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ 满足条件 $z\left(x,x^2\right)=1$ 的解 $z=z\left(x,y\right)$.

解：

$$
z=\int\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}y+C\left(x\right)=x^2y+y^2+C\left(x\right)
$$

$$
1=z\left(x,x^2\right)=2x^4+C\left(x^2\right)\Longrightarrow C\left(x^2\right)=1-2x^4\Longrightarrow C\left(x\right)=1-2x^2\left(x\geqslant 0\right)
$$

$$
\Longrightarrow z\left(x,y\right)=\begin{cases}x^2y+y^2-2x^2+1, & x\geqslant 0\\ x^2y+y^2+C\left(x\right), & x<0\end{cases}
$$

9.2.36　求下列复合函数的微分 $\mathrm{d}u$：

(2) $u=f\left(\xi,\eta\right),\xi=xy,\eta=\dfrac{x}{y}$

解：

$$
\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y
$$

$$
=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}x+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}y-\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y
$$

(4) $u=f\left(x,\xi,\eta\right),\xi=x^2+y^2,\eta=x^2+y^2+z^2$

解：

$$
\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\mathrm{d}z
$$

$$
=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+2x\frac{\partial f}{\partial \xi}+2x\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}x+\left(2y\frac{\partial f}{\partial \xi}+2y\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}y+2z\frac{\partial f}{\partial \eta}\mathrm{d}z
$$

9.2.38　求直角坐标和极坐标的坐标变换 $x=x\left(r,\theta\right)=r\cos\theta,y=y(r,\theta)=r\sin\theta$ 的 Jacobi 行列式.

解：

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r
$$

9.3　隐函数定理和逆映射定理

9.3.2　求由下列方程所确定的隐函数的导数

(3) $x^y=y^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解：

$$\iff f(x,y)=x\ln y-y\ln x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln y-\frac{y}{x},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y}-\ln x,0=\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$$

$$=\frac{y^2}{1-\ln y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{y^2}{1-\ln y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2(2\ln x-3)}{(1-\ln y)x^3}+\frac{y^2(1-\ln x)^2(3y-2y\ln y)}{x^2(1-\ln y)^3}$$

(4) $e^{-xy}-2z+e^z=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial x}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解：

$$f(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z=0,\frac{\partial f}{\partial x}=-ye^{-xy},\frac{\partial f}{\partial y}=-xe^{-xy},\frac{\partial f}{\partial z}=e^z-2$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2},\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{-x}{y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}=\frac{-y^2e^{-xy}}{e^z-2}-\frac{y^2e^{z-2xy}}{(e^z-2)^3}$$

(6) $F(x,x+y,x+y+z)=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f'_1+f'_2+f'_3,\frac{\partial F}{\partial y}=f'_2+f'_3,\frac{\partial F}{\partial z}=f'_3$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-f'_1-f'_2-f'_3}{f'_3},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f'_2-f'_3}{f'_3}$$

(7) $F(xy,yz)=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yF'_1,\frac{\partial F}{\partial y}=xF'_1+zF'_2,\frac{\partial F}{\partial z}=yF'_2$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F'_1}{F'_2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xF'_1-zF'_2}{yF'_2}$$

9.3.3 找出满足方程 $x^2+xy+y^2=27$ 的函数 $y=y(x)$ 的极大值与极小值.

解：

$$F(x,y)=x^2+xy+y^2-27=0,\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y,\frac{\partial F}{\partial y}=2y+x\implies\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2x-y}{2y+x}$$

因为 $y=y(x)$ 取极大值与极小值时都满足 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，因此联立 $\begin{cases}2x+y=0\\x^2+xy+y^2=27\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=6\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3\\y_2=-6\end{cases}$，则 $y=y(x)$ 极大值为 6，极小值为 -6

9.3.4　试求由下列方程所确定的隐函数的微分.

(3) $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$，求 $\mathrm{d}u$

解：

$$f(u,x,y,z)=u^3-3(x+y)u^2+z^3=0,\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=-3u^2,\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2,\frac{\partial f}{\partial u}=3u^2-6(x+y)u$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}u=\frac{-f'_x}{f'_u}dx+\frac{-f'_y}{f'_u}dy+\frac{-f'_z}{f'_u}dz=\frac{u}{u-2(x+y)}\mathrm{d}x+\frac{u}{u-2(x+y)}\mathrm{d}y-\frac{z^2}{u^2-2(x+y)u}\mathrm{d}z$$

(4) $F(x-y,y-z,z-x)=0$，求 $\mathrm{d}z$

解：

$$0=F'_1\mathrm{d}(x-y)+F'_2\mathrm{d}(y-z)+F'_3\mathrm{d}(z-x)=(F'_1-F'_3)\mathrm{d}x+(F'_2-F'_1)\mathrm{d}y+(F'_3-F'_2)\mathrm{d}z$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}z=\frac{F'_3-F'_1}{F'_3-F'_2}\mathrm{d}x+\frac{F'_1-F'_2}{F'_3-F'_2}\mathrm{d}y$$

9.3.5

证明：当 $1+xy=k(x-y)$（其中 k 为常数）时有等式：$\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$

证明：

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{1+xy}{x-y}$$

易知方程成立时 $x\neq y$，则 $1+xy\neq 0$，当 $k\neq 0$ 时：

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan\frac{1}{k}$$

当 $k=0$ 时，由连续性，取 $k\to 0^+$ 和 $k\to 0^-$ 即可，因此 $\mathrm{d}\arctan x-\mathrm{d}\arctan y=0 \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$

9.3.7　设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数，试证：不论 φ 为怎样的可微函数，都有 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$

解：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=c\varphi'_1,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=c\varphi'_2,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-a\varphi'_1-b\varphi'_2$$

$$\Longrightarrow a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{c\varphi'_1}{a\varphi'_1+b\varphi'_2}+b\frac{c\varphi'_2}{a\varphi'_1+b\varphi'_2}=c$$

9.3.8　设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=y(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所定义的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$

解：

$$g(x,y)=x^2-xy+y^2-1=0,\frac{\partial g}{\partial x}=2x-y,\frac{\partial g}{\partial y}=2y-x \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-2x}{2y-x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-2x^2}{2y-x},\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2y^2-2x^2}{2y-x}=\frac{8y^3-30xy^2+24x^2y-10x^3}{(2y-x)^3}$$

9.3.11　设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由下列方程组所确定的隐函数组，求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

(1) $\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$

解：设映射 $\varphi:(x,y)\in\mathbb{R}^2\to(u,v)\in\mathbb{R}^2$，一方面：

$$\begin{cases} x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v=0 \\ \mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x & -y \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

另一方面：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\boldsymbol{J}(\varphi)\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

因此：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|\boldsymbol{J}(\varphi)|=\frac{x-y}{u-v},(u-v\neq 0)$$

(3) $\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-x,v^2y) \end{cases}$

解：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u=uf_1'\mathrm{d}x+xf_1'\mathrm{d}u+f_2'\mathrm{d}v+f_2'\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v=g_1'\mathrm{d}u-g_1'\mathrm{d}x+v^2g_2'\mathrm{d}y+2vyg_2'\mathrm{d}v \end{cases} \iff \begin{cases} (1-xf_1')\mathrm{d}u-f_2'\mathrm{d}v=uf_1'\mathrm{d}x+f_2'\mathrm{d}y \\ -g_1'\mathrm{d}u+(1-2vyg_2')\mathrm{d}v=-g_1'\mathrm{d}x+v^2g_2'\mathrm{d}y \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-xf_1' & -f_2' \\ -g_1' & 1-2vyg_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} uf_1' & f_2' \\ -g_1' & v^2g_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\begin{vmatrix} uf_1' & f_2' \\ -g_1' & v^2g_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-xf_1' & -f_2' \\ -g_1' & 1-2vyg_2' \end{vmatrix}}=\frac{uv^2f_1'g_2'+f_2'g_1'}{1-xf_1'-2vyg_2'+2vxyf_1'g_2'-f_2'g_1'}$$

9.3.14　设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$

解：对 x 求导数：

$$\begin{cases} z'=f+xf'+xy'f' \\ F_1'+F_2'y'+F_3'z'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} xf' & -1 \\ F_2' & F_3' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f-xf' \\ -F_1' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-fF_3'-xf'F_3'-F_1'}{xf'F_3'+_2'} \\ \dfrac{fF_2'+xf'F_2'-xf'F_1'}{xf'F_3'+_2'} \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{fF_2'+xf'F_2'-xf'F_1'}{xf'F_3'+_2'}$$

9.3.16　函数 $u=u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$ 定义，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$

解：显然，x 和 y 为独立变量，z 和 t 为 y 的隐函数

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}t=-\dfrac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial z}&\dfrac{\partial g}{\partial t}\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}&\dfrac{\partial h}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}y}{\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial h}{\partial t}-\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial h}{\partial z}}\\ \dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}y}{\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial h}{\partial t}-\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial h}{\partial z}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1',\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'-f_3'\frac{g_1'h_2'}{g_2'h_2'-g_3'h_1'}+f_4'\frac{g_1'h_1'}{g_2'h_2'-g_3'h_1'}$$

9.4　空间曲线与曲面

9.4.7　设两条隐式曲线 $F(x,y)=0$ 于与 $G(x,y)=0$ 在一点 (x_0,y_0) 相交，求在交点处两条隐式曲线切线的夹角，这里 $F(x,y),G(x,y)$ 都是可微函数.

解：不妨设隐式曲线 $y=y(x)$, 切向量 $\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_G$：

$$0=\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\implies\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\implies\boldsymbol{n}_F=\left(\frac{\partial F}{\partial y},-\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

同理，$\boldsymbol{n}_G=\left(\dfrac{\partial G}{\partial y},-\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)$

$$\cos\theta(\boldsymbol{n}_F,\boldsymbol{n}_G)=\frac{\boldsymbol{n}_F\cdot\boldsymbol{n}_G}{|\boldsymbol{n}_F||\boldsymbol{n}_G|}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial G}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)^2}}$$

9.4.8　求下列曲面在指定点的切平面和法线方程.

(3) $e^z-z+xy=3$，在点 $(2,1,0)$

解：设 $F(x,y,z)=e^z-z+xy$，由于隐式曲面 $F(x,y,z)=3$ 是 F 的一个等值面，所以 $\nabla F\perp$ 曲面 $F(x,y,z)=3$

$$\nabla F=\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}=(1,2,0)$$

$$\implies\boldsymbol{n}=(1,2,0)\ \pi:x+2y-4=0$$

9.4.9　求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解：设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2$，则：

$$\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$$

$$\nabla F=(2x,4y,2z)\quad \pm(2x,4y,2z)=(1,-1,2)\implies (x,y,z)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-1)$$

$$\implies \pi_1: x-y+2z-\frac{11}{4}=0,\pi_2: x-y+2z+\frac{11}{4}=0$$

9.4.13　试证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=by$ 互相正交.

证明：

$$\boldsymbol{n}_1=\nabla(x^2+y^2+z^2-ax)=(2x-a,2y,2z),\boldsymbol{n}_2=\nabla(x^2+y^2+z^2-by)=(2x,2y-b,2z)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=ax \\ x^2+y^2+z^2=by \end{cases} \implies ax=by \implies \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=2(2(x^2+y^2+z^2)-ax-by)=0$$

$$\implies \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$$

9.4.15　证明曲面 $z=xe^{x/y}$ 的每一切平面都过原点.

证明：

$$\mathrm{d}z=(e^{x/y}+\frac{x}{y}e^{x/y})\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}e^{x/y}$$

$$\implies \text{切平面}\Pi:(e^{x_0/y_0}+\frac{x_0}{y_0}e^{x_0/y_0})(x-x_0)-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{x_0/y_0}(y-y_0)-z+x_0e^{x_0/y_0}=0$$

左边代入 $(x,y,z)=(0,0,0)$：

$$-x_0e^{x_0/y_0}-\frac{x_0^2}{y_0}e^{x_0/y_0}+\frac{x_0^2}{y_0}e^{x_0/y_0}+x_0e^{x_0/y_0}=0$$

因此所有切平面均过原点　□

9.4.17　求下列曲线在给定点的切线和法平面方程

(1) $\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$　在点 $(1,3,4)$

解：

$$\boldsymbol{n}_1=\nabla(y^2+z^2-25)\big|_{(1,3,4)}=(0,6,8),\boldsymbol{n}_2=\nabla(x^2+y^2-10)\big|_{(1,3,4)}=(2,6,0)$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-48,16,-12)$$

$$\pi:-48(x-1)+16(y-3)-12(z-4)=0\iff 12x-4y+3z-12=0$$

9.4.18 设方程组 $\begin{cases} pu+qv-t^2=0 \\ qu+pv-s^2=0 \end{cases}$ $(p^2-q^2\neq 0)$ 确定了隐函数 $\begin{cases} u=u(s,t) \\ v=v(s,t) \end{cases}$ 以及反函数 $\begin{cases} s=s(u,v) \\ t=t(u,v) \end{cases}$，求证：$\dfrac{\partial t}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial s}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}=\dfrac{p^2}{p^2-q^2}$

证明：

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2t\mathrm{d}t \\ 2s\mathrm{d}s \end{pmatrix}(p^2-q^2\neq 0)$$

$$\iff \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{p}{p^2-q^2} & \dfrac{-q}{p^2-q^2} \\ \dfrac{-q}{p^2-q^2} & \dfrac{p}{p^2-q^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t\mathrm{d}t \\ 2s\mathrm{d}s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{2pt\mathrm{d}t-2qs\mathrm{d}s}{p^2-q^2} \\ \dfrac{2ps\mathrm{d}s-2qt\mathrm{d}t}{p^2-q^2} \end{pmatrix}$$

$$\implies \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{p}{2t}\frac{2pt}{p^2-q^2}=\frac{p^2}{p^2-q^2},\frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{p}{2s}\frac{2ps}{p^2-q^2}=\frac{p^2}{p^2-q^2}\quad\square$$

9.5 多变量函数的 Taylor 公式与极值

9.5.1(2) 求曲线 $F(t)=f(x+th,y+tk)$ 在 $t=1$ 处的斜率，其中 $f(x,y)=x^2+2xy^2-y^4$

解：设 $\xi(t)=x+th,\eta(t)=y+tk$，则：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=(2\xi+2\eta^2)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+(4\xi\eta-4\eta^3)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}$$

$$=(2(x+th)+2(y+tk)^2)h+(4(x+th)(y+tk)-4(y+tk)^3)k$$

$$\implies \left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=2((x+h)+(y+k)^2)h+4(y+k)(x+h-(y+k)^2)k$$

9.5.3 对于函数 $f(x,y)=\sin\pi x+\cos\pi y$，用中值定理证明，$\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{4}{\pi}=\cos\dfrac{\pi\theta}{2}+\sin\left[\dfrac{\pi}{2}(1-\theta)\right]$

证明：由微分中值定理，$\exists\theta\in(0,1)$，使：

$$2=f(\frac{1}{2},0)-f(0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'_x(\frac{\theta}{2},\frac{1}{2}(1-\theta))-\frac{1}{2}f'_y(\frac{\theta}{2},\frac{1}{2}(1-\theta))=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right]$$

$$\iff \frac{4}{\pi}=\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right]\quad\square$$

9.5.4 求下列函数的 Taylor 公式，并指出展开式成立的区域.

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$，直到四阶为止

解：

$$1-x^2-y^2\geqslant 0\implies D=\overline{B(O,1)}$$

$$f(x,y)=1-\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x^2+y^2)^2}{8}+o(\rho^4)$$

$$f(x,y)=1-\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{x^2+2x^2y^2+y^4}{8}+o(\rho^4),D=\overline{B(O,1)}$$

(5) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 (0,0)，直到 n 阶为止

解：记 $u(x,y)=x^2+y^2$：

$$f(x,y)=\sin u=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(u^{(2n+1)})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x^2+y^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(\rho^{4n+2})$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{4}]}(-1)^k\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{x^{2i}y^{4k+2-2i}}{i!(2k+1-i)!}+o(\rho^n),(n\geqslant 2)$$

$$\Longrightarrow f(x,y)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{4}]}(-1)^k\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{x^{2i}y^{4k+2-2i}}{i!(2k+1-i)!}+o(\rho^n), & n\geqslant 2\\ 0+o(\rho), & n=1\end{cases},D=\mathbb{R}^2$$

(7) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的 Taylor 展开式

解：由于展开式唯一，且：

$$f(x,y)=2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2+5$$

$$\Longrightarrow f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2,D=\mathbb{R}^2$$

9.5.5　设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数，当 $x=1,y=1$ 时 $z=1$，试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 z 直到二次项为止

解：对 $z^3-2xz+y=0$ 求偏导数：

$$\begin{cases}(3z^2-2x)\frac{\partial z}{\partial x}-2z=0\\ (3z^2-2x)\frac{\partial z}{\partial y}+1=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2x-3z^2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{16xz}{(2x-3z^2)^3}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6z}{(2x-3z^2)^3}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3}\end{cases}$$

$$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+o(\rho^2)$$

9.5.6

证明：球面三角学中的余弦定理 $\cos z=\cos x\cos y+\sin x\sin y\cos\theta$ 在原点的邻域内转化为欧几里得几何中的余弦定理 $z^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$

解：在单位球中，设三个顶点 X,Y,Z 对应向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}$ 所张平面的夹角 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 夹角为 γ，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}$ 夹角为 β，$\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}$ 夹角为 α

做二阶展开：

$$1-\frac{\gamma^2}{2}+o(\gamma)=\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)+\alpha\beta\cos\theta+o(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})=1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\alpha\beta\cos\theta+o(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$$

$$\Longrightarrow\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\theta+o(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})$$

又 $z=2\sin\frac{\gamma}{2},x=2\sin\frac{\alpha}{2},y=2\sin\frac{\beta}{2}\Longrightarrow\gamma=2\arcsin\frac{z}{2},\alpha=2\arcsin\frac{x}{2},\beta=2\arcsin\frac{y}{2}$，做二阶展开得：

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta+o(\rho)$$

因此 $\rho\to 0$ 时：

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$$

9.5.7(4)　$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，求隐函数 $y=y(x)$ 的极值.

解：设 $\varphi(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x(2x^2+2y^2-a^2),\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y(2x^2+2y^2+a^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{x(a^2-2x^2-2y^2)}{y(2x^2+2y^2+a^2)}=0$$

若 $x=0$，则 $y=0$，不成立（由于隐函数存在）。

因此

$$\begin{cases}2x^2+2y^2=a^2\\ \varphi(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0\end{cases}\implies\begin{cases}x^2=\dfrac{3}{8}a^2\\ y^2=\dfrac{1}{8}a^2\end{cases}$$

极大值：$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}|a|$，极小值：$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}|a|$

9.5.8　求一个三角形，使得他的三个角的正弦乘积最大.

解：设三个内角分别为 $x,y,\pi-x-y,f(x,y)=\sin x\sin y\sin(\pi-x-y)$ 定义在开区域 $\{(x,y)|x>0,y>0,x+y<\pi\}$ 上.

由于 $f(x,y)\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f=0,\lim\limits_{y\to0^+}f=0,\lim\limits_{x+y\to\pi^-}f=0$，则极大值在内部取到.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y\sin(2x+y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin x\sin(2y+x)=0\end{cases}\implies\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}\\ y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

则取极大值时三角形为正三角形.

9.5.11(2)　求函数最大值和最小值：$z=x^2-xy+y^2,\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 1\}$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y,\frac{\partial z}{\partial y}=2y-x,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1\implies\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=3$$

$$\begin{cases}2x-y=0\\ 2y-x=0\end{cases}\implies\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\implies \text{极小值}z(0,0)=0$$

最大值在边界取到：

$$z(x,y)=x^2+y^2-xy\leqslant|x|^2+|y|^2+|x||y|\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant1\quad(x,y)=(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,0)$$

9.5.14　设 $f(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$，

证明：$(0,0)$ 不是它的极值点，但沿过 $(0,0)$ 的每条直线，$(0,0)$ 都是它的极大值点.

解：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6xy-4x^3,\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-4y,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6y-12x^2,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=12(x^2-2y),\nabla f=(6xy-4x^3)\boldsymbol{i}+(3x^2-4y)\boldsymbol{j}$$

$$f(x,y)=(y-x^2)(x^2-2y)\implies \forall x\neq 0, f(x,\frac{3}{4}x^2)=\frac{x^2}{8}>f(0,0)\implies (0,0)$$

$$\forall r,\theta\in\mathbb{R}, g(r)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=3r^3\cos^2\theta\sin\theta-r^4\cos^4\theta-2r^2\sin^2\theta, g'(0)=0, g'(0)=-4\sin^2\theta$$

若 $\sin\theta\neq 0$，则 $(0,0)$ 是极值点.

若 $\sin\theta=0$，则 $g(r)=-r^4\leqslant 0=g(0)$，则 $(0,0)$ 是极值点.

9.5.19　椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的内接长方体中，求体积最大的长方体的体积.

解：设 $f(x,y,z)=8xyz$ $\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=8yz-\lambda\frac{2x}{a^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=8xz-\lambda\frac{2y}{b^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}=8xy-\lambda\frac{2z}{c^2}=0\\ \varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}\implies\begin{cases}x^2=\frac{4\lambda^2}{b^2c^2}\\ y^2=\frac{4\lambda^2}{a^2c^2}\\ z^2=\frac{4\lambda^2}{a^2b^2}\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}\implies\begin{cases}x^2=\frac{a^2}{3}\\ y^2=\frac{b^2}{3}\\ z^2=\frac{c^2}{3}\\ \lambda^2=\frac{a^2b^2c^2}{12}\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}\\ y=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}\\ z=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}\end{cases}\implies |f(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{b}{\sqrt{3}},\pm\frac{c}{\sqrt{3}})|=\frac{8\sqrt{3}abc}{9}$$

9.5.21　设曲面 $S:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$

(1) 证明 S 上任意点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于 a.

证明：设 $\varphi(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ $\nabla\varphi=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$，则 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为 $\sqrt{y_0z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0y_0}(z-z_0)=0$，截距之和为

$$\sqrt{y_0z_0}+\sqrt{x_0z_0}+z_0+\sqrt{x_0y_0}+\sqrt{x_0z_0}+x_0+\sqrt{y_0z_0}+\sqrt{y_0x_0}+y_0=(\sqrt{x}_0+\sqrt{y}_0+\sqrt{z}_0)^2=a$$

(2) 在 S 上求一切平面，使此切平面与三坐标面所围成的四面体体积最大，并求四面体体积的最大值.

解：在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面在 x 轴截距为 $u=\sqrt{x_0y_0}+\sqrt{x_0z_0}+x_0$，在 y 轴的截距为 $v=\sqrt{y_0z_0}+\sqrt{y_0x_0}+y_0$，在 z 轴的截距为 $w=\sqrt{y_0z_0}+\sqrt{x_0z_0}+z_0$

设体积 $f(u,v,w)=\frac{uvw}{6}$，且 $u+v+w=a$

$$\begin{cases}\frac{vw}{6}-\lambda=0\\ \frac{uw}{6}-\lambda=0\\ \frac{uv}{6}-\lambda=0\\ u+v+w=a\end{cases}\implies\begin{cases}u=\frac{a}{3}\\ v=\frac{a}{3}\\ w=\frac{a}{3}\end{cases}$$

此时 $f(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})=\frac{a^3}{162}$，平面：$x+y+z-\frac{a}{3}=0$

9.6　向量场的微商

9.6.1　Nabla 运算符与点乘、叉乘的性质

1　设 ϕ,ψ 是数量场，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是向量场，则

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi+\psi) &= \nabla\psi+\nabla\phi \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b} \\
\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b} \\
\nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \\
\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a}) &= \phi\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\phi \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} \\
\nabla\times(\phi\boldsymbol{a}) &= \nabla\phi\times\boldsymbol{a}+\phi\nabla\times\boldsymbol{a} \\
\nabla\times\nabla\phi &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) &= 0
\end{aligned}$$

2

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

9.6.1　求电场强度 $\boldsymbol{e}=\dfrac{q}{r^3}\boldsymbol{r}(r=|\boldsymbol{r}|)$ 的旋度和散度.

解：

$$\boldsymbol{e}=\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{e}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{e}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\boldsymbol{0}$$

9.6.2　设 $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\omega_3\boldsymbol{k}$ 是一个常值向量，求向量场 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{v}$，并给出合理的物理解释。这里 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是位置向量。

解：由于 $\boldsymbol{\omega}$ 为常向量：

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\nabla\times\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z-\omega_3 y & \omega_3 x-\omega_1 z & \omega_1 y-\omega_2 x \end{vmatrix}=2\omega_1\boldsymbol{i}+2\omega_2\boldsymbol{j}+2\omega_3\boldsymbol{k}$$

物理解释：物体运动的旋度等于瞬时角速度的 2 倍

9.6.4(2)　设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, r=|\boldsymbol{r}|$，求 $\mathrm{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

解：

$$\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{r}$$

9.6.5(1)　求向量场的旋度 $\boldsymbol{v}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$.

解：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}=-2z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}-2y\boldsymbol{k}$$

9.6.6(2)　设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, r=|\boldsymbol{r}|$，求 $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$.

解：

$$\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})x & f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})y & f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})z\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$$

9.6.8　设 ϕ,ψ 是数量场，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量场，证明：

(1) $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\phi$

证明：设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a})=\frac{\partial(\phi a_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\phi a_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\phi a_3)}{\partial z}=a_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+\phi\frac{\partial a_1}{\partial x}+a_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+\phi\frac{\partial a_2}{\partial y}+a_3\frac{\partial\phi}{\partial z}+\phi\frac{\partial a_3}{\partial z}=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\phi$$

(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}$

证明：设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\frac{\partial(a_2b_3-a_3b_2)}{\partial x}+\frac{\partial(a_3b_1-a_1b_3)}{\partial y}+\frac{\partial(a_1b_2-a_2b_1)}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}=&b_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)+b_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+b_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\\ &+a_1\left(\frac{\partial b_2}{\partial z}-\frac{\partial b_3}{\partial y}\right)+a_2\left(\frac{\partial b_3}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)+a_3\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}$$

(3) $\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})=\nabla\phi\times\boldsymbol{a}+\phi\nabla\times\boldsymbol{a}$

证明：设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \phi a_1 & \phi a_2 & \phi a_3\end{vmatrix}=\phi\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}+a_3\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+a_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+a_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\phi\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\phi\times\boldsymbol{a}$$

9.6.9

证明：$\mathrm{rot\,grad}\phi = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}, \mathrm{div\,rot}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0$

证明：

$$\mathrm{rot\,grad}\phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

设 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$

$$\mathrm{div\,rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial y} = 0$$

9.7　微分形式

9.7.2　对下列微分形式的 ω，计算它们的微分，即计算 $\mathrm{d}\omega$

(3) $\omega = xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$

解：

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(xy) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}(x^2) \wedge \mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

(6) $\omega = xy\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + zx\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

解：

$$\mathrm{d}\omega = \omega^3_{\nabla\cdot(xy,yz,zx)} = (x+y+z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

第 9 章综合习题

9.1　设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证：存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)$ 的充分必要条件是 $a_j\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\dfrac{\partial f}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

证明：

$$\exists F(s) \in C^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)$$

$$\iff F'\sum_{i=1}^n a_i\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}F = \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

$$\iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - F'a_i\right)\mathrm{d}x_i \equiv 0$$

$$\iff \forall i = 1, 2, \ldots, n : \frac{1}{a_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = F'$$

$$\iff \forall i, j = 1, 2, \ldots, n : a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \square$$

9.3　若函数 $u=f(x,y,z)$ 满足恒等式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)(t>0)$，则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理：可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是：$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z)$

证明：我们下证明 n 维情形：$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in C^1$ 为 k 次齐次函数的充要条件是：

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

必要性：

$$f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$t\quad\sum_{i=1}^n x_if'_i(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)=kt^{k-1}f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$t=1\ \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

充分性：

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \ \varphi(t)=f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)$$

$$t>0\ k\varphi(t)=t\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial(tx_i)}=t\varphi'(t)$$

$$\implies\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi}=\frac{k}{t}\implies\varphi(t)=\varphi(1)t^k$$

$$\implies f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\dots,x_n)\quad\square$$

9.6　证明不等式：$\frac{x^2+y^2}{4}\leqslant\mathrm{e}^{x+y-2}\ (x,y\geqslant 0)$.

证明：当 $x,y\geqslant 0$ 时，$\frac{x^2+y^2}{4}\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$，所以只需证明：

$$\mathrm{e}^t\geqslant\frac{\mathrm{e}^2t^2}{4},\ t\geqslant 0$$

显然成立。 $\square$

9.8　设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域，$f\in C^1(D)$. 若 $x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\ ((x,y)\in D)$，则 $f(x,y)$ 是常数.

证明：由微分中值定理，$\forall(x,y)\in D$，$\exists\theta\in(0,1)$，使：

$$f(x,y)-f(0,0)=x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\theta x,\theta y)}+y\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\theta x,\theta y)}=\frac{1}{\theta}\left(\theta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\theta x,\theta y)}+\theta y\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\theta x,\theta y)}\right)=0$$

$$\iff f(x,y)\equiv f(0,0)\quad\square$$

9.9 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ $f(0,0)=0$.

证明：存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 g_1,g_2 使得 $f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y)$

证明：设 $\varphi(t)=f(tx,ty)$，则：

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial t}=xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)\ \varphi(0)=0$$

由于 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$，因此 f'_x,f'_y 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，则 $g(t)=f'_x(tx,ty),h(t)=f'_y(tx,ty)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可积 (由复合函数性质)

$$f(tx,ty)=\varphi(t)=\int_0^t(xf'_x(\tau x,\tau y)+yf'_y(\tau x,\tau y))\mathrm{d}\tau=x\int_0^t f'_x(\tau x,\tau y)\mathrm{d}\tau+y\int_0^t f'_y(\tau x,\tau y)\mathrm{d}\tau$$

$$f(x,y)=x\int_0^1 f'_x(\tau x,\tau y)\mathrm{d}\tau+y\int_0^t f'_y(\tau x,\tau y)\mathrm{d}\tau$$

则取

$$g_1(x,y)=\int_0^1 f'_x(\tau x,\tau y)\mathrm{d}\tau,g_2(x,y)=\int_0^1 f'_y(\tau x,\tau y)\mathrm{d}\tau$$

$\forall(x_0,y_0),\exists M>max\{|x_0|,|y_0|\},f'_x,f'_y$ 在闭集 $[-M,M]\times[-M,M]$ 一致连续. 下证 g_1 连续：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall d((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta,|f'_x(x_1,y_1)-f'_x(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

$$\varepsilon>0,\forall h,k:\sqrt{h^2+k^2}<\delta,\ \ |\tau(x+h)-\tau x|\leqslant|h|,|\tau(y+k)-\tau y|\leqslant|k|:$$

$$|g_1(x+h,y+k)-g(x,y)|=\left|\int_0^1(f'_x(\tau(x+h),\tau(y+k))-f'_x(\tau x,\tau y))\mathrm{d}\tau\right|<\int_0^1|\varepsilon|\mathrm{d}\tau=\varepsilon$$

因此 g_1 连续，同理 g_2 连续　□

9.11 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上恒正，且有二阶连续偏导数。证明 $u(x,y)$ 满足方程

$$u\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

的充分必要条件是：存在 $f,g\in C^1(\mathbb{R})$ 使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

证明：由于 $u(x,y)$ 恒正，所以对上式同时除以 $u^2(x,y)$ 得：

$$0=\frac{u\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{y}$$

于是，设 $\frac{\partial}{\partial x}\ln u(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x),\frac{\partial}{\partial y}\ln u(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\ln g(y)$，也即 $u(x,y)=f(x)g(y)$ (此处可以不考虑常数项)；反之亦成立。　□

9.12 设 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j},t\in[a,b]$ 有连续的导数，

证明：存在 $\theta\in(a,b)$，使得 $|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|\leqslant|\boldsymbol{r}'(\theta)|(b-a)$

证明：由微分中值定理：考虑有连续导数的函数 $f(t)=(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a))\boldsymbol{r}(t)$，由微分中值定理，$\exists\theta\in(a,b)$:

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|^2=(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a))(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a))=f(b)-f(a)=(b-a)f'(\theta)=(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a))(b-a)\boldsymbol{r}'(\theta)$$

于是：

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|^2=(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a))(b-a)\boldsymbol{r}'(\theta)\leqslant|\boldsymbol{r}'(\theta)|(b-a)|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|$$

$$\implies|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|\leqslant|\boldsymbol{r}'(\theta)|(b-a)$$

第十章　多变量函数的重积分

10.1　二重积分

10.1.4　设函数 φ 和 ψ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积，求证：$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且有 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\int_c^d\psi(x)\mathrm{d}x$.

(1)

证明：φ 和 ψ 可积 $\implies$ 有界，设 $M\geqslant|\varphi|,M\geqslant|\psi|$ 恒成立。设 $\omega_\varphi(T_1),\omega_\psi(T_2)$ 分别为 φ,ψ 在分割 T_1,T_2 下，在 $[a,b],[c,d]$ 上的振幅。

$$\varphi,\psi\text{可积}\implies\lim_{\|T_1\|\to0^+}\omega_\varphi(T_1)=0,\lim_{\|T_2\|\to0^+}\omega_\psi(T_2)=0$$

$$\implies\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\|T_1\|<\delta\text{时},\omega_\varphi(T_1)<\varepsilon;\text{当}\|T_2\|<\delta\text{时},\omega_\psi(T_2)<\varepsilon$$

设分割 $T:a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,c=y_0<y_1<\ldots<y_n=d;T_1:a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b;T_2:c=y_0<y_1<\ldots<y_n=d$

对于集合 $D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\forall(x',y'),(x'',y'')\in D_{ij}$:

$$|f(x',y')-f(x',y'')|=|\varphi(x')\psi(y')-\varphi(x')\psi(y'')+\varphi(x')\psi(y'')-\varphi(x'')\psi(y'')|$$

$$\leqslant|\varphi(x')||\psi(y')-\psi(y'')|+|\psi(y'')||\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant M\omega_\psi(T_2)_j+M\omega_\varphi(T_1)_i$$

$$\implies\omega_f(T)_{ij}\leqslant M(\omega_\varphi(T_1)_i+\omega_\psi(T_2)_j)$$

又 $\|T\|=\sqrt{\|T_1\|^2+\|T_2\|^2}$，因此：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\|T\|<\delta\text{时 }\|T_1,\|T_2\|<\delta$$

$$\implies\omega_f(T)=\sum_{i,j=1}^n\omega_f(T)_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\leqslant M\sum_{i,j=1}^n(\omega_\varphi(T_1)_i+\omega_\psi(T_2)_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

$$=M\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})\sum_{j=1}^n(\omega_\varphi(T_1)_i+\omega_\psi(T_2)_j)(y_j-y_{j-1})=M\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})((d-c)\omega_\varphi(T_1)_i+\omega_\psi(T_2))$$

$$<M(b-a+d-c)\varepsilon$$

因此 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ 可积.　□

(2)

证明：设分割 $T: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b, c=y_0<y_1<\ldots<y_n=d; T_1: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b; T_2: c=y_0<y_1<\ldots<y_n=d$，由可积性：

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{\|T\|\to 0^+}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(x_i)\psi(y_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\\ &= \lim_{\|T\|\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)(x_i-x_{i-1})\sum_{j=1}^{n}\psi(y_j)(y_j-y_{j-1})\end{aligned}$$

$$=\lim_{\|T\|\to 0^+}S_\varphi(T_1)S_\psi(T_2)=\lim_{\|T_1\|\to 0^+}S_\varphi(T_1)\lim_{\|T_2\|\to 0^+}S_\psi(T_1)=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\int_c^d\psi(x)\mathrm{d}x \quad \square$$

10.1.7　设函数 $f(x,y)$ 连续，求极限 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：因为函数连续，由积分中值定理：

$$\forall r>0, \exists P(r)\in\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}, \frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(P(r)) \tag{1}$$

$$\lim_{r\to 0}P(r)=(0,0) \tag{2}$$

$$(1),(2)\implies \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(0,0)$$

补充题　若 D 是零测度集，f 在 D 上可积，求证：$\iint_D f=0$

证明：设 $M\geqslant|f|$，则任意分割 T 对应的 Darboux 和：

$$|S(T)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(P_i)|\sigma(D_i)\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\sigma(D_i)=M\sigma(D)=0$$

$$\implies \forall T: S(T)\equiv 0 \implies \iint_D f=\lim_{\|T\|\to 0^+}s(T)=0 \quad \square$$

10.2　二重积分的换元

10.2.1(1)　计算积分 $\displaystyle\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

解：

$$\begin{aligned}\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\ln(1+r^2)\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^R\ln(1+r^2)\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{2}R\ln(1+R^2)-\frac{\pi}{2}\int_0^R\frac{2r^2}{1+r^2}\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{2}R\ln(1+R^2)+\pi\arctan R-\pi R\end{aligned}$$

10.2.2 计算二重积分

(1) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: x^2+y^2 \leqslant x+y.$

解：极坐标下，$x^2+y^2 \leqslant x+y \iff r^2 \leqslant r(\cos\theta+\sin\theta), r \leqslant 0 \implies \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}], r \leqslant \cos\theta+\sin\theta$

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\sin 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(4) $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:\ y^2=ax, y^2=bx, x^2=my, x^2=ny \quad (a>b>0, m>n>0).$

解：设变换 $\varphi: \begin{cases} x = \sqrt[3]{uv^2} \\ y = \sqrt[3]{u^2v} \end{cases}$ $, D' = [n,m]\times[a,b]$，则 $\varphi: D' \to D$ 是双射.

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} \frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_n^m \frac{1}{3}\mathrm{d}v \int_b^a \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}(m-n)(a-b)\end{aligned}$$

(8) $\iint_D \sin\frac{y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: \quad x+y=1, x=0, y=0 \quad .$

解：设变换 $\varphi: \begin{cases} x = u-v \\ y = v \end{cases}$ $, D' = \{(u,v)|u\in[0,1], 0 \leqslant v \leqslant u\}$

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

$$\begin{aligned}\iint_D \sin\frac{y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} \sin\frac{v}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^u \sin\frac{v}{u}\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 u(1-\cos 1)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1-\cos 1}{2}\end{aligned}$$

10.2.3 求下列曲线围成的平面区域的面积

(2) $(x-y)^2+x^2 = a^2 (a>0).$

解：设变换 $\varphi:\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\sin\theta - r\cos\theta \end{cases}$, $D' = [0,a]\times[0,2\pi]$

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ \sin\theta-\cos\theta & r\cos\theta + r\sin\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r \\ &= \pi a^2\end{aligned}$$

(3) 由直线 $x+y=a, x+y=b, y=kx, y=mx(0<a<b, o<k<m)$ 围成的平面区域.

解：设变换 $\varphi:\begin{cases} x = \dfrac{u}{v+1} \\ y = \dfrac{uv}{v+1} \end{cases}$, $D' = [a,b]\times[k,m]$

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v+1} & \frac{-u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} \frac{u}{(v+1)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_a^b u\mathrm{d}u\int_k^m \frac{1}{(v+1)^2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{m+1}\right)\end{aligned}$$

10.2.4 证明 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right]^2$.

证明：设 $D_1 = \{(x,y)|0\leqslant x\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\leqslant y\leqslant x\}, D_2 = \{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 1\}, D_3 = D_1\setminus D_2, D_4 = D_2\setminus D_1, D_5 = D_1\cap D_2$

则 $\sigma(D_1)=\sigma(D_2), \sigma(D_3)=\sigma(D_4)$，由于 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}<1$，则 $\mathrm{d}(O,D_3)>\mathrm{d}(O,D_4)$

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{r^2}r\mathrm{d}r = 8\iint_{D_2} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_5} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_4} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right]^2 &= \iint_{|x|\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}, |y|\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\iint_{D_1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_5} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_3} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由于 $\sigma(D_1)=\sigma(D_2), \sigma(D_3)=\sigma(D_4), \mathrm{d}(O,D_3)>\mathrm{d}(O,D_4)$，所以 $\exists\xi\in D_3, \eta\in D_2$，使得：

$$\begin{aligned}\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right]^2 - \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_3} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_4} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= e^{\mathrm{d}(O,\xi)^2}\sigma(D_3) - e^{\mathrm{d}(O,\eta)^2}\sigma(D_4) > 0\end{aligned}$$

因此

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right]^2 \quad \square$$

10.2.5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $\displaystyle\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}y \geqslant 1.$

证明：显然 $e^{f(x)}, e^{-f(y)}$ 在 $[0,1]$ 连续且非负，由 Cauchy 不等式：

$$\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}y \geqslant \left(\int_0^1 e^{f(x)-f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 = 1 \quad \square$$

10.2.6 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，证明 $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} e^{f(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2.$

证明：设变换 $\varphi: \begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}$ $, D' = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2$$

$$\begin{aligned}
\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} e^{f(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} 2e^{f(2u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\mathrm{d}v \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{f(2u)}\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{f(2u)}\mathrm{d}u \\
&\geqslant \int_{-1}^{1} (f(u)+1)\mathrm{d}u = 2
\end{aligned}$$

10.2.7 设 $f(t)$ 为连续函数，求证

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

其中 D 为: $|x| \leqslant \frac{A}{2}, |y| \leqslant \frac{A}{2}, A > 0$ 为常数.

证明：设变换 $\varphi: \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$ $, D' = \{(u,v)|v \geqslant 0, |u|+|v| \leqslant \frac{A}{2}\}, D'' = \{(u,v)|v \leqslant 0, |u|+|v| \leqslant \frac{A}{2}\}$

$$|\boldsymbol{J}(\varphi)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -2, \sigma(D' \cap D'') = 0$$

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint_{D'} f(2v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 2\iint_{D''} f(2v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 2\int_0^{\frac{A}{2}} f(2v)\mathrm{d}v \int_{v-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}-v} \mathrm{d}u + 2\int_{-\frac{A}{2}}^{0} f(2v)\mathrm{d}v \int_{-v-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}+v} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^A f(v)(A-v)\mathrm{d}v + \int_{-A}^{0} f(v)(A+v)\mathrm{d}v \\
&= \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

10.3　三重积分

10.3.1　计算下列三重积分

(3) $\iiint_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$：由 $y=\sqrt{x}, y=x, x=1, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成.

解：

$$\begin{aligned}\iiint_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 \frac{x-x^2}{2}(1-\sin x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{12}+\frac{\sin 1}{2}-1+\cos 1\\ &= \frac{\sin 1}{2}+\cos 1-\frac{11}{12}\end{aligned}$$

(4) $\iiint_V (a-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$：由 $y=0, z=0, 2x+y=a, x+y=a, y+z=a$ 围成.

解：

$$\begin{aligned}\iiint_V (a-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^a (a-y)\mathrm{d}y\int_{\frac{a-y}{2}}^{a-y}\mathrm{d}x\int_0^{a-y}\mathrm{d}z\\ &= \int_0^a \frac{(a-y)^3}{2}\mathrm{d}(y-a)\\ &= \frac{a^4}{8}\end{aligned}$$

10.3.2　计算下列积分值

(2) $\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$

解：

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\ &= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]}\sqrt{R^2-r^2}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}r^3\mathrm{d}r\\ &= \pi\int_0^{R^2} a\sqrt{R^2-a}\mathrm{d}a\\ &= -\frac{2}{3}\pi\int_0^{R^2} a\mathrm{d}\left((R^2-a)^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= \frac{2}{3}\pi a(R^2-a)^{\frac{3}{2}}\Big|_{R^2}^{0}+\frac{2}{3}\pi\int_0^{R^2}\left(-\frac{2}{5}\right)\mathrm{d}\left((R^2-a)^{\frac{5}{2}}\right)\\ &= \frac{4\pi}{15}R^5\end{aligned}$$

(4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z$

解：设变换 $\varphi:\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $,(r,\theta)\in D=[0,1]\times[0,\dfrac{\pi}{2}],|\boldsymbol{J}(\varphi)|=r$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z &= \frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left((2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{3}\iint_D\left((2-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^3\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{\pi}{6}\int_0^1\left((2-r^2)^{\frac{3}{2}}r-r^4\right)\mathrm{d}r\\
&=\frac{\pi}{6}\int_0^1\left(-\frac{\mathrm{d}(r^5)}{5}+\frac{(2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2}\mathrm{d}(r^2)\right)\\
&=-\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{30}(2-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1\\
&=\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{15}
\end{aligned}$$

10.3.3　计算下列三重积分

(3) $\iiint_V\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2=z^2,z=1$ 围成.

解：设 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant z^2\}$，则：

$$\begin{aligned}
\iiint_V\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\pi z^2\mathrm{d}z\\
&=\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

10.3.5　计算下列曲面围成的立体体积

(1) $y=0,z=0,3x+y=6,3x+2y=12,x+y+z=6.$

解：

$$\begin{aligned}
\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^6\mathrm{d}y\int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}}\mathrm{d}x\int_0^{6-x-y}\mathrm{d}z\\
&=\int_0^6\mathrm{d}y\int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}}(6-x-y)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^6\frac{(6-y)^2}{6}\mathrm{d}y\\
&=12
\end{aligned}$$

(2) $z=x^2+y^2,z=2x^2+2y^2,y=x,y=x^2$

解：

$$\begin{aligned}
\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(\frac{4x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{35}$$

(6) $x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2=z^2$ （含 z 轴部分）.

解：$V=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2\leqslant \min\{2az-z^2,z^2\}\}$，当 $a\geqslant 0$ 时：

$$\begin{aligned}\sigma(V)=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^a \mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 2az-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a \pi z^2\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi\left(2az-z^2\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi a^3}{3}+\frac{2\pi a^3}{3}\\&=\pi a^3\end{aligned}$$

当 $a<0$ 时，同理可得 $\sigma(V)=-\pi a^3$，则 $\sigma(V)=\pi|a|^3$

(7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ （含 z 轴部分）.

解：易知 $V=\{(x,y,z)\,|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\min\{1-\frac{z^2}{c^2},\frac{z^2}{c^2}\},z\geqslant 0\}$。

设变换 $\phi:\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\\ z=z\end{cases}, |\boldsymbol{J}(phi)|=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=abr$，当 $a,b,c>0$ 时：

$$\begin{aligned}\sigma(V)=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left(\int_0^{\frac{c}{\sqrt2}}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z}{c}}abr\mathrm{d}r+\int_{\frac{c}{\sqrt2}}^{c}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}abr\mathrm{d}r\right)\\&=\frac{\pi ab}{c^2}\left(\int_0^{\frac{c}{\sqrt2}}z^2\mathrm{d}z+\int_{\frac{c}{\sqrt2}}^{c}\left(c^2-z^2\right)\mathrm{d}z\right)\\&=\frac{\pi ab}{c^2}\left(\frac{c^3}{6\sqrt2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{3\sqrt2}-\frac{c^3}{3}+\frac{c^3}{6\sqrt2}\right)\\&=\frac{(2-\sqrt2)}{3}\pi abc\end{aligned}$$

当 a,b,c 不全为正时，同理可得：$\sigma(V)=\frac{(2-\sqrt2)}{3}\pi|abc|$，因此 $\sigma(V)=\frac{(2-\sqrt2)}{3}\pi|abc|$

10.3.6　求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 内的平均值.

解：易知 $V=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z\}=\{(x,y,z)\,|\left(x-\frac12\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2+\left(z-\frac12\right)^2\leqslant\frac{\sqrt3}{2}\}$

设变换 $\phi:\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi+\frac12\\ y=r\sin\theta\sin\varphi+\frac12\\ z=r\cos\theta+\frac12\end{cases}, |\boldsymbol{J}(\phi)|=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta,(r,\theta,\varphi)\in[0,\frac{\sqrt3}{2}]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$

$$\sigma(V)=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3=\frac{\sqrt3}{2}\pi$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}r^2\left(r^2+\frac34+r\left(\sin\theta\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)+\cos\theta\right)\right)\mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\frac{3\sqrt{3}}{20} + \frac{9}{64} \left(\sin\theta \left(\sin\varphi + \cos\varphi \right) + \cos\theta \right) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{9}{128} \pi \left(\sin\varphi + \cos\varphi \right) + \frac{9}{64} \sin\theta\cos\theta \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{5}\pi
\end{aligned}
$$

则平均值：

$$
\underset{V}{\overline{f\left(x,y,z\right)}} = \frac{\iiint_V f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sigma\left(V\right)} = \frac{6}{5}
$$

10.3.7　设 $F\left(t\right) = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 f 为可微函数，求 $F'\left(t\right)$.

解：设变换 $\phi: \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \left|\boldsymbol{J}\left(\phi\right)\right| = \dfrac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\theta,\varphi\right)} = r^2\sin\theta, \left(r,\theta,\varphi\right) \in \left[0,\left|t\right|\right]\times\left[0,\pi\right]\times\left[0,2\pi\right]$

$$
F\left(t\right) = \iiint_{\left[0,\left|t\right|\right]\times\left[0,\pi\right]\times\left[0,2\pi\right]} f\left(r^2\right) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi \int_0^{\left|t\right|} f\left(r^2\right) r^2 \mathrm{d}r
$$

则 $F'\left(t\right) = 4\pi f\left(t^2\right) t^2 \left(t \geqslant 0\right)$，由于 $F\left(t\right)$ 为偶函数，则：

$$
F'\left(t\right) = \begin{cases} 4\pi f\left(t^2\right) t^2, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -4\pi f\left(t^2\right) t^2, & t < 0 \end{cases} = 4\pi f\left(t^2\right) t\left|t\right|
$$

10.3.8

证明：$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(z\right) \mathrm{d}v = \pi \int_{-1}^{1} f\left(z\right) \left(1-z^2\right) \mathrm{d}z$.

证明：

$$
\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(z\right) \mathrm{d}v = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \iint_{\overline{B\left(O,\sqrt{1-z^2}\right)}} f\left(z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \pi\left(1-z^2\right) f\left(z\right) \mathrm{d}z
$$

10.3.9　设函数 $f\left(x,y,z\right)$ 连续，

证明：

$$
\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \int_z^b \mathrm{d}y \int_y^b f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}x
$$

证明：设 $V = \left\{\left(x,y,z\right) \middle| a \leqslant z \leqslant y \leqslant x \leqslant b\right\}$

一方面：

$$
\iiint_V f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}z
$$

另一方面：

$$
\iiint_V f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \int_z^b \mathrm{d}y \int_y^b f\left(x,y,z\right) \mathrm{d}x
$$

因此：

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \int_z^b \mathrm{d}y \int_y^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$$

10.4 n 重积分

10.4.1(3) 计算下列 n 重积分：$\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_n$

解：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_n\\
=&\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_n \mathrm{d}x_n\\
=&\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1} \mathrm{d}x_{n-1}\frac{x_{n-1}^2}{2}\\
=&\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} x_{n-2} \mathrm{d}x_{n-2}\frac{x_{n-2}^4}{2\times 4}\\
=&\cdots\\
=&\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-k-1}} x_{n-k} \mathrm{d}x_{n-k}\frac{x_{n-k}^{2k}}{2^k k!}\\
=&\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1 \frac{x_1^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}\\
=&\frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}$$

解：设变换 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{\varphi}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\left(t_1,t_1t_2,\cdots,\prod\limits_{i=1}^n t_i\right),(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in[0,1]^n$，于是：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}\right|\\
=&|\det \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})|\\
=&\left\|\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
t_2 & t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
t_3t_2 & t_3t_1 & t_2t_1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\prod\limits_{j\neq 1} t_j & \prod\limits_{j\neq 2} t_j & \prod\limits_{j\neq 3} t_j & \prod\limits_{j\neq 4} t_j & \cdots & \prod\limits_{j\neq n} t_j
\end{matrix}\right\|\\
=&\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n t_i}\left\|\begin{matrix}
t_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
t_1t_2 & t_1t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
t_1t_2t_3 & t_1t_2t_3 & t_1t_2t_3 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\prod\limits_{i=1}^n t_i & \prod\limits_{i=1}^n t_i & \prod\limits_{i=1}^n t_i & \prod\limits_{i=1}^n t_i & \cdots & \prod\limits_{i=1}^n t_i
\end{matrix}\right\|\\
=&\prod_{i=1}^n t_i^{n-i}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x_n \int_0^{x_n} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_0^{x_2} x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_1$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1 t_1^{n-1}\mathrm{d}t_1\int_0^1 t_2^{n-2}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^1 t_n^0\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^i t_i\mathrm{d}t_n\\
&=\prod_{i=1}^n\int_0^1 t_i^{2(n-i)+1}\mathrm{d}t_i\\
&=\prod_{i=1}^n\frac{1}{2(n-i)}\\
&=\frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}
$$

10.4.3　设 $f(x)$ 连续，

证明：

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

证明：由于 $f(x)$ 连续，由 Newton − Lebniz 公式，$f(x)$ 的任意变上限重积分均可导。设 $g(a)=\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n-\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\mathrm{d}t$，易知 $g(0)=0$，下面将 a 视做变元。

又因为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^k a^k\int_0^a f(t)(-t)^{n-1-k}\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(k\mathrm{C}_{n-1}^k a^{k-1}\int_0^a f(t)(-t)^{n-1-k}\mathrm{d}t+\mathrm{C}_{n-1}^k a^k f(a)(-a)^{n-1-k}\right)\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}(n-2)\mathrm{C}_{n-2}^{k-1}a^{k-1}\int_0^a f(t)(-t)^{n-1-k}\mathrm{d}t+\frac{f(a)a^{n-1}}{(n-1)!}(1-1)^{n-1}\\
&=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-2}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

所以对于 $k=0,1,\cdots,n-1$：

$$g^{(k)}(a)=\int_0^a\mathrm{d}x_{k+1}\int_0^{x_{k+1}}\mathrm{d}x_{k+2}\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n-\frac{1}{(n-1-k)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1-k}\mathrm{d}t$$

则：

$$\forall k=0,1,2,\cdots,n-1,\forall a: g^{(k)}(0)=g^{(n)}(a)=0$$

由 Taylor 公式：

$$g(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)a^k}{k!}+\frac{g^{(n)}(\theta a)a^n}{n!}=0$$

$$\iff\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

10.4.4　设 $f(x)$ 连续，

证明：

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^n$$

证明：当 $n=1$ 时：$\displaystyle\int_0^a f(x_1)\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{1!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^1$，成立。

假设 $n=m$ 时成立，也即：

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_m)\mathrm{d}x_m - \frac{1}{m!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^m \equiv 0$$

那么 $n=m+1$ 时，将 a 视作变元，$\forall b$：

$$\int_0^b \mathrm{d}a\left(\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_m)\mathrm{d}x_m - \frac{1}{m!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^m\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^b \mathrm{d}a\left(\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{m-1}} f(a)f(x_1)\cdots f(x_m)\mathrm{d}x_m - \frac{1}{m!}f(a)\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^m\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^b \mathrm{d}x_1 \int_1^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_m} f(x_1)\cdots f(x_{m+1})\mathrm{d}x_{m+1} - \frac{1}{(m+1)!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^{m+1} = 0$$

由 b 的任意性，知对 $n=m+1$ 也成立。由数学归纳法，本题得证。

综合习题

10.3(1)　设 $a>0, b>0$，试求积分：

$$\boldsymbol{I}_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

解：设 $x = e^t, t\in[-\infty, 0]$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_1 &= \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\int_a^b x^y \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \mathrm{d}y \int_{-\infty}^0 \sin(-t)\, e^{t(y+1)}\mathrm{d}t \\
&\triangleq \int_a^b \boldsymbol{I}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \int_{-\infty}^0 \sin(-t)\, e^{t(y+1)}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)}\mathrm{d}\cos t \\
&= e^{t(y+1)}\cos t\Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \cos t\,(y+1)\, e^{t(y+1)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\int_{-\infty}^{0}(y+1)\,e^{t(y+1)}\mathrm{d}\sin t\\
&= 1-(y+1)\,e^{t(y+1)}\sin t\Big|_{-\infty}^{0}+\int_{-\infty}^{0}(y+1)^2\,e^{t(y+1)}\sin t\mathrm{d}t\\
&= 1-(y+1)^2\boldsymbol{I}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ \boldsymbol{I}_1=\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)
$$

10.6　计算曲面 $\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=y$ 所围成的体积 V.

解：设变换 $\phi:\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ $,|\boldsymbol{J}(\phi)|=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta,(r,\theta,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$

$$
\left(x^2+y^2\right)^2+z^4\leqslant y\iff r^4\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)\leqslant r\sin\theta\sin\varphi\iff 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(V)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}}r^2\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3+\cos2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\
&=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi
\end{aligned}
$$

10.7

证明：$\displaystyle\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\mathrm{d}t.$

证明：设变换 $\phi:\begin{cases}xy=u\\ y=v\end{cases}$ $,|\boldsymbol{J}(\phi)|=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{v},0\leqslant u\leqslant v\leqslant1$，考虑反常积分：

$$
\begin{aligned}
\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1u^u\mathrm{d}u\int_u^1\frac{1}{v}\mathrm{d}v\\
&=\int_0^1u^u\,(-\ln u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 u^u \left(\mathrm{d}u - \mathrm{d}\left(u\ln u\right)\right) \\
&= \int_0^1 t^t \mathrm{d}t - \int_0^1 e^{u\ln u} \mathrm{d}\left(u\ln u\right) \\
&= \int_0^1 t^t \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

10.8 设 a, b 是不全为 0 的常数，求证：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f\left(ax+by+c\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2} f\left(t\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}t$$

证明：设变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$，则 $ax+by = u\sqrt{a^2+b^2}, (u,v) \in \overline{B\left(O,1\right)}$.

$$
\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f\left(ax+by+c\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2} f\left(t\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

10.12 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元的连续函数，

证明：

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_n = \int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^{b}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^{b} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_n$$

证明：设有界闭区域 $V = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\middle| a \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant b\right\}$

则 $\mathrm{LHS} = \int_V f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\sigma = \mathrm{RHS}$ $\square$

第十一章　曲线积分和曲面积分

11.1　数量场在曲线上的积分

定理 11.1: 第一型曲线积分

对于分段光滑的曲线 L，设它的分段光滑的参数表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

且满足 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$。设曲线上有可积数量场 $\boldsymbol{\varphi}(x,y,z)$，则数量场在曲线上的积分为：

$$\int_L\varphi\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta\varphi(\boldsymbol{r}(t))\left|\boldsymbol{r}'(t)\right|\mathrm{d}t$$

11.1.1　计算下列曲线的弧长

(4) $z^2=2ax$ 与 $9y^2=16xz$ 的交线，由点 $O\left(0,0,0\right)$ 到点 $A\left(2a,\frac{8a}{3},2a\right)$.

解：若 $a\geqslant 0$，则 $x,z\geqslant 0,z=\sqrt{2ax},y=\frac{4\sqrt{xz}}{3}=\frac{4}{3}\left(2a\right)^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned}\int_L\mathrm{d}s=&\int_0^{2a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\\=&\int_0^{2a}\sqrt{1+\sqrt{\frac{2a}{x}}+\frac{a}{2x}}\mathrm{d}x\\=&\int_0^{2a}\left(1+\sqrt{\frac{a}{2x}}\right)\mathrm{d}x\\=&4a\end{aligned}$$

若 $a\leqslant 0$，则由对称性知：$\int_L\mathrm{d}s=-4a$

因此，$s=\int_L\mathrm{d}s=4|a|$

(5) $4ax=\left(y+z\right)^2$ 与 $4x^2+3y^2=3z^2$ 的交线，由原点到点 $M\left(x,y,z\right)\left(a>0,z\geqslant 0\right)$.

解：设变换 $\varphi:\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，代入 $\begin{cases}4ax=\left(y+z\right)^2\\4x^2+3y^2=3z^2\end{cases}$ 解得：$r=\frac{2\sqrt{3}a\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}$，于是

$\begin{cases}x=\frac{3a\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}\\y=\frac{2\sqrt{3}a\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}\\z=\frac{2\sqrt{3}a\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}\end{cases}$，由 $x\geqslant 0$ 知 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{-6a\cos\theta}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}a\left(1-2\sin\theta\right)}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\\\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}a\left(\sin\theta-2\right)}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\implies \mathrm{d}s =& \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{a}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\sqrt{36\cos^2\theta+12\left(1-2\sin\theta\right)^2+12\left(\sin\theta-2\right)^2}\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{a}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\sqrt{24\sin^2\theta-96\sin\theta+96}\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{2\sqrt{6}a\left(2-\sin\theta\right)}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

由 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta$ 解得 $\theta=\arcsin\frac{3a-x}{3a+x}$。令 $t=\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta},\mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}$，我们易得：

$$
\begin{aligned}
\int\frac{2-\sin\theta}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta =& \int\frac{2-\frac{2t}{t^2+1}}{\left(1+\frac{2t}{t^2+1}\right)^2}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
=&4\int\frac{t^2-t+2}{\left(t+1\right)^4}\mathrm{d}t \\
=&4\int\frac{t^2+2t+1-3t-3+3}{\left(t+1\right)^4}\mathrm{d}t \\
=&4\int\left(\frac{1}{\left(t+1\right)^2}-\frac{3}{\left(t+1\right)^3}+\frac{3}{\left(t+1\right)^4}\right)\mathrm{d}t \\
=&\frac{-4}{t+1}+\frac{6}{\left(t+1\right)^2}-\frac{4}{\left(t+1\right)^3}+C \\
=&-\frac{4t^2+2t+2}{\left(t+1\right)^3}+C \\
=&-\frac{4\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2+2\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+2}{\left(1+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^3}+C \\
=&-2\frac{\left(\cos\theta+1\right)^2\left(\sin\theta+3-\cos\theta\right)}{\left(\sin\theta+\cos\theta+1\right)^3}+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s\left(x\right) =& 2\sqrt{6}a\int_{\arcsin\frac{3a-x}{3a+x}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2-\sin\theta}{\left(1+\sin\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta \\
=&\left.\frac{4\sqrt{6}\left(\cos\theta+1\right)^2\left(\cos\theta-\sin\theta-3\right)}{\left(\sin\theta+\cos\theta+1\right)^3}\right|_{\arcsin\frac{3a-x}{3a+x}}^{\frac{\pi}{2}} \\
=&4\sqrt{6}a\left(-\frac{1}{2}-\frac{\left(1+\frac{2\sqrt{3ax}}{3a+x}\right)^2\left(\frac{2\sqrt{3ax}}{3a+x}-\frac{3a-x}{3a+x}-3\right)}{\left(1+\frac{2\sqrt{3ax}}{3a+x}+\frac{3a-x}{3a+x}\right)^3}\right) \\
=&4\sqrt{6}a\left(-\frac{1}{2}-\frac{\left(3a+x+2\sqrt{3ax}\right)^2\left(2\sqrt{3ax}-12a-2x\right)}{\left(6a+2\sqrt{3ax}\right)^3}\right) \\
=&4\sqrt{6}a\left(-\frac{1}{2}-\frac{\left(\sqrt{3a}+\sqrt{x}\right)^4\left(2\sqrt{3ax}-12a-2x\right)}{\left(2\sqrt{3a}\right)^3\left(\sqrt{x}+\sqrt{3a}\right)^3}\right) \\
=&4\sqrt{6}a\frac{2x\sqrt{x}+6a\sqrt{x}}{24a\sqrt{3a}} \\
=&\frac{\sqrt{2x}\left(x+3a\right)}{3\sqrt{a}}
\end{aligned}
$$

另

解：易知 $z=\sqrt{y^2+\frac{4}{3}x^2},4ax=\left(y+\sqrt{y^2+\frac{4}{3}x^2}\right)^2=2y^2+\frac{4}{3}x^2+2y\sqrt{y^2+\frac{4}{3}x^2}$

移项得 $y\sqrt{y^2+\frac{4}{3}x^2}=2ax-y^2-\frac{2}{3}x^2$，两边平方得 $4ax^2+\frac{4}{9}x^4=4axy^2+\frac{8}{3}ax^3$，化简得 $y^2=\frac{1}{9a}x^3-\frac{2}{3}x^2+ax=\frac{x(x-3a)^2}{9a}$，因此 $y=\pm\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}\left(x-3a\right),x\geqslant 0$

代入 $z=\sqrt{y^2+\frac{4}{3}x^2}$ 得：$z=\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}\left(x+3a\right)$，再代入 $4ax=\left(y+z\right)^2$ 得 $y=\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}\left(3a-x\right)$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3a-x}{6\sqrt{ax}}-\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}=\dfrac{a-x}{2\sqrt{ax}}\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3a+x}{6\sqrt{ax}}+\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}=\dfrac{a+x}{2\sqrt{ax}}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{a+x}{\sqrt{2ax}}\mathrm{d}x$$

$$s\left(x\right)=\int_0^x\mathrm{d}s=\int_0^x\frac{a+u}{\sqrt{2au}}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2x}\left(x+3a\right)}{3\sqrt{a}}$$

11.1.2　计算下列曲线积分

(4) $\int_L\frac{\mathrm{d}s}{x-y}$，$L:$ 联结点 $A\left(0,-2\right)$ 到点 $B\left(4,0\right)$ 的直线段.

解：设 $L:\boldsymbol{r}\left(t\right)=4t\boldsymbol{i}+\left(2t-2\right)\boldsymbol{j},t\in[0,1]\mathrm{d}s=2\sqrt{5}\mathrm{d}t$

$$\int_L\frac{\mathrm{d}s}{x-y}=\int_0^1\frac{2\sqrt{5}\mathrm{d}t}{2t+2}=\sqrt{5}\ln 2$$

(6) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，$L:$ 由曲线 $r=a,\varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{4}$ 所围成的区域边界.

解：设 $L_1:\varphi=0,r=t\in[0,a];L_2:r=a,\varphi=t\in[0,\frac{\pi}{4}];L_3:r=a-t,t\in[0,a],\varphi=\frac{\pi}{4}$

易知 $L=L_1\cup L_2\cup L_3$，则：

$$\begin{aligned}&\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s\\=&\int_{L_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s\\=&e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1\\=&\left(\frac{\pi}{4}a+2\right)e^a-2\end{aligned}$$

(8) $\int_L z\mathrm{d}s$，L 是圆锥螺线 $x=t\cos t,y=t\sin t,z=t\left(0\leqslant t\leqslant t_0\right)$.

解：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{t^2+2}\mathrm{d}t$$

$$\int_L z\mathrm{d}s=\int_0^{t_0}t\sqrt{t^2+2}\mathrm{d}t=\frac{\left(t_0^2+2\right)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}}{3}$$

(9) $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}s$，$L:$ 双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ 的 $x\geqslant 0$ 的一半.

解：设 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $r^4=a^2r^2\cos 2\theta$，由于 $r\geqslant 0$，所以 $r=|a|\sqrt{\cos 2\theta},\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2\cos 2\theta+a^2\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{|a|}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}s &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos\theta|a|\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |a^3|\cos 2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{|a^3|}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta-\cos 3\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}|a^3|\end{aligned}$$

(10) $\int_L \left(x^2+y^2+z^2\right)^n \mathrm{d}s$，$L:$ 圆周 $x^2+y^2=a^2, z=0.$

解：易知 $x^2+y^2+z^2\equiv a^2$，因此：

$$\int_L \left(x^2+y^2+z^2\right)^n \mathrm{d}s = \int 0^{2\pi} a^{2n}|a|\mathrm{d}\theta = 2\pi|a|^{2n+1}$$

(12) $\int_L (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}s$，$L:$ 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0.$

解：易知平面 $x+y+z=0$ 的一个单位法向量为 $\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，我们取垂直于 $\boldsymbol{e}_3$ 的两个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \boldsymbol{e}_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，设圆周参数方程 $\boldsymbol{r}(\theta)=|a|\cos\theta\boldsymbol{e}_1+|a|\sin\theta\boldsymbol{e}_2=|a|\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,-\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\theta,\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

$$\int_L (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |a^3|\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = -\pi|a|^3$$

11.2　数量场在曲面上的积分

定理 11.2: 第一型曲面积分

设 S 是一张光滑的参数曲面：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in D$$

且满足 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 在 D 上光滑，且 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\neq\mathbf{0}$，$D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域。设曲面 S 上有可积数量场 $\varphi(x,y,z)$，那么：

$$\iint_S v\mathrm{d}S = \iint_D v(\boldsymbol{r}(u,v))\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

11.2.1　求下列曲面在指定部分的面积

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分.

解：：设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{cases}$，由 $r^2\leqslant 2\cos\theta$ 得 $0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta, \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\left|\frac{\partial(r\cos\theta,r\sin\theta,r)}{\partial r}\times\frac{\partial(r\cos\theta,r\sin\theta,r)}{\partial\theta}\right|\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}|(\cos\theta,\sin\theta,1)\times(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)|\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}|(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r)|\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{2} r \mathrm{d}r \\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\left(\cos 2\theta+1\right) \mathrm{d}\theta \\
&=\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az$ $(z \geqslant 0)$ 所围成的立体的全表面.

解：：设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ ，则知围成部分上表面满足 $z=\sqrt{3a^2-r^2}$，下表面满足 $z=\frac{r^2}{2a}$，$(r,\theta)\in[0,\sqrt{2}a]\times[0,2\pi]$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{3a^2-r^2}\right)}{\partial r} \times \frac{\partial\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{3a^2-r^2}\right)}{\partial\theta}\right| \\
=&\left|\left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{-r}{\sqrt{3a^2-r^2}}\right) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\right| \\
=&\left|\left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{3a^2-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{3a^2-r^2}}, r\right)\right| \\
=&\frac{\sqrt{3}ar}{\sqrt{3a^2-r^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \dfrac{r^2}{2a}\right)}{\partial r} \times \frac{\partial\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \dfrac{r^2}{2a}\right)}{\partial\theta}\right| \\
=&\left|\left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{r}{a}\right) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\right| \\
=&\left|\left(-\frac{r^2}{a}\cos\theta, \frac{r^2}{a}\sin\theta, r\right)\right| \\
=&\frac{r}{a}\sqrt{r^2+a^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S&=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}a}\left(\frac{\sqrt{3}ar}{\sqrt{3a^2-r^2}}+\frac{r}{a}\sqrt{r^2+a^2}\right) \mathrm{d}r \\
&=\pi \int_0^{\sqrt{2}a}\left(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-r^2}}+\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\right) \mathrm{d}\left(r^2\right) \\
&=\frac{16}{3}\pi a^2
\end{aligned}
$$

(6) 锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被 Oxy 平面和 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 所截下的部分.

解：：设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ ，则知围成部分上表面满足 $z=\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$，下表面满足 $z=r$，由 $\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\geqslant r$ 得 $0\leqslant r\leqslant\frac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}$.

$$
\left|\frac{\partial\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \dfrac{r\cos\theta}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)}{\partial r} \times \frac{\partial\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \dfrac{r\cos\theta}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)}{\partial\theta}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left|\left(\cos\theta,\sin\theta,\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)\times\left(-r\sin\theta,r\cos\theta,-\frac{r\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\right|\\
&=\left|\left(-\frac{r}{\sqrt{2}},0,r\right)\right|\\
&=\frac{\sqrt{6}}{2}r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial\left(r\cos\theta,r\sin\theta,r\right)}{\partial r}\times\frac{\partial\left(r\cos\theta,r\sin\theta,r\right)}{\partial\theta}\right|\\
=&\left|\left(\cos\theta,\sin\theta,1\right)\times\left(-r\sin\theta,r\cos\theta,0\right)\right|\\
=&\left|\left(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r\right)\right|\\
=&\sqrt{2}r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}r+\sqrt{2}r\right)\mathrm{d}r\\
&=\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\sqrt{2}-\cos\theta\right)^2}\\
&=\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}-\cos\theta\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\cos\theta\right)^2}\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\int_0^{\pi}\frac{4+2\cos^2\theta}{\left(2-\cos^2\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta\\
&=\left(2\sqrt{6}+4\sqrt{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4+2\cos^2\theta}{\left(2-\cos^2\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta\\
&=\left(8\sqrt{6}+16\sqrt{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5+\cos2\theta}{\left(3-\cos2\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta\\
&=\left(8\sqrt{6}+16\sqrt{2}\right)\int_0^{+\infty}\frac{5+\dfrac{1-t^2}{t^2+1}}{\left(3-\dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)^2}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\\
&=\left(4\sqrt{6}+8\sqrt{2}\right)\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2t^2+1}+\frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\left(4\sqrt{6}+8\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}+\left(8\sqrt{6}+16\sqrt{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sec^2\varphi}{\sec^4\varphi}\mathrm{d}\varphi\\
&=\left(2\sqrt{3}+4\right)\pi+\left(8\sqrt{6}+16\sqrt{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\varphi\\
&=\left(4\sqrt{3}+8\right)\pi
\end{aligned}
$$

(8) 曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2a^2xy$ 的全部.

解：：设 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{cases}$，由 $r^4=a^2r^2\sin^2\theta\sin2\varphi$ 得 $r=|a|\sin\theta\sqrt{\sin2\varphi},\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$$
(x,y,z)=\left(|a|\sin^2\theta\sqrt{\sin2\varphi}\cos\varphi,|a|\sin^2\theta\sqrt{\sin2\varphi}\sin\varphi,|a|\sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin2\theta}\right)
$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial\varphi}=|a|\left(\dfrac{\cos 3\varphi\sin^2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}},\dfrac{\sin 3\varphi\sin^2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}},\dfrac{\cos 2\varphi\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right)\\ \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}=|a|\left(\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi,\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\sin\varphi,\cos 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\right)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\varphi}\times\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\theta}\right|\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}a^2\sqrt{\sin^4\theta}\mathrm{d}\theta\\&=a^2\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi^2}{4}a^2\end{aligned}$$

11.2.2 计算下列曲面积分

(1) $\iint_S(x+y+z)\,\mathrm{d}S$，$S$: 立方体 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$ 的全表面.

解：：注意到：x,y,z 是对称的。因此：

$$\begin{aligned}\iint_S(x+y+z)\,\mathrm{d}S&=3\iint_{[0,1]^2}(y+z+1+y+z+0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(2y+2z+1)\,\mathrm{d}z\\&=3\int_0^1(2y+2)\,\mathrm{d}y\\&=9\end{aligned}$$

(5) $\iint_S\left(x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1\right)\mathrm{d}S$，$S$: 圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分.

解：：设 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=r\end{cases}$ ，由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 得 $r\leqslant 2\cos\theta,\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial(r\cos\theta,r\sin\theta,r)}{\partial r}\times\frac{\partial(r\cos\theta,r\sin\theta,r)}{\partial\theta}\right|\\=&|(\cos\theta,\sin\theta,1)\times(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)|\\=&|(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r)|\\=&\sqrt{2}r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1\right)\mathrm{d}S\\=&\iint_S\mathrm{d}S\\=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}r\mathrm{d}r\\=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$=\sqrt{2}\pi$$

(6) $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{r^2}$，$S:$ 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的部分，r 是 S 上的点到原点的距离.

解：：由对称性：

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{r^2} &= 4\iint_{S\cap[0,+\infty)^2} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S \\
&= 4\int_0^{|H|}\mathrm{d}z\int_0^{|R|}\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\left(x,\sqrt{z^2-x^2},z\right)}{\partial x}\times\frac{\partial\left(x,\sqrt{R^2-x^2},z\right)}{\partial z}\right|\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{|H|}\mathrm{d}z\int_0^{|R|}\frac{1}{r^2}\left|\left(1,\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},0\right)\times(0,0,1)\right|\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{|H|}\mathrm{d}z\int_0^{|R|}\frac{1}{r^2}\left|\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},-1,0\right)\right|\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{|H|}\mathrm{d}z\int_0^{|R|}\frac{1}{z^2+R^2}\frac{|R|}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{|H|}\frac{1}{z^2+R^2}\mathrm{d}z\int_0^{|R|}\frac{|R|}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{|R|}\arctan|\frac{H}{R}|\arcsin 1|R| \\
&= \frac{\pi}{2}\arctan|\frac{H}{R}|
\end{aligned}$$

(7) $\iint_S |xyz|\mathrm{d}S$，S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 介于二平面 $z=0$ 和 $z=1$ 间的部分.

解：：由对称性：

$$\begin{aligned}
\iint_S |xyz|\mathrm{d}S &= 4\iint_{S\cap[0,+\infty)^2} xyz\mathrm{d}S \\
&= 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r \\
&= \pi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}\left(r^2\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)
\end{aligned}$$

11.2.4 设 G 是平面 $Ax+By+Cz+D=0\ (C\neq 0)$ 上的一个有界闭区域，它在 Oxy 平面上的投影是 G_1，试证 $\frac{G\text{的面积}}{G_1\text{的面积}}=\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}$.

证明：：易知：$z=\frac{-D-Ax-By}{C}$，因此：

$$\sigma(G)=\iint_G\mathrm{d}S$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}\iint_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}\iint_{G_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}\sigma\left(G_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \frac{G\text{的面积}}{G_1\text{的面积}} = \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}
$$

11.3　向量场在曲线上的积分

定理 11.3: 第二型曲线积分

对于分段光滑的曲线 L，设它的分段光滑的参数表示为

$$
\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad t \in [\alpha, \beta]
$$

且满足 $\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, t 是曲线的正向参数。设曲线上有可积向量场 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则向量场在曲线上的积分为：

$$
\int_\alpha^\beta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \int_L \left(P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z\right)
$$

定理 11.4: Green 公式

设 D 是有线条逐段光滑的封闭曲线 L 围成的平面区域（因此 $L = \partial D$），$\boldsymbol{v} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 是 D 上的光滑向量场，则

$$
\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

其中曲线积分的方向为 $L = \partial D$ 的“逆时针”方向，也即与 z 轴成右手螺旋.

证明：对于 D，分割成有限块单连通的 D_i 的并 $D = \cup_{i=1}^n D_i$，其中 D_i 没有公共的内点，每个 D_i 的边界 ∂D_i 都是逐段光滑的曲线，取相同于 D 的正方向。由积分的可加性知，只需证明积分在每一块这样的 D_i 上成立，则在 D 上成立。

这是因为：$\forall \partial D_i$，它的一部分要么在 D 内，要么是 ∂D 的一部分，因此内部的 ∂D_i 会被从两个相反的方向各积分一次，相互抵消，而 ∂D 正好被按正方向积分了一次。

易证，对于曲边矩形 $D_y = \{(x,y) | \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$，有：

$$
\int_{\partial D_y} P\mathrm{d}x = -\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

同时，对于曲边矩形 $D_x = \{(x,y) | \varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y), a \leqslant y \leqslant b\}$，有：

$$
\int_{\partial D_x} Q\mathrm{d}y = \iint_{D_y} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

设 D 是一类既可以分割成有限个 D_x 型的曲边矩形，又可以分割成有限个 D_y 型的曲边矩形的平面区域，那么在 D 上，原式即成立。

推广　考虑 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $\boldsymbol{v}$，由微分形式 $\omega_{\boldsymbol{v}}^1=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1=\omega_{\nabla\times\boldsymbol{v}}^2$，则 Green 公式也可以表达为：

$$\oint_{\partial D}\omega_{\boldsymbol{v}}^1=\int_D\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1$$

11.3.1　计算下列第二型曲线积分.

(2) $\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，$L$ 是沿正方形 $A\left(1,0\right),B\left(0,1\right),C\left(-1,0\right),D\left(0,-1\right)$ 逆时针一周的路径.

解：易知 $\forall\left(x,y\right)\in L,|x|+|y|=1$，因此

$$\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\oint_L\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right)=0$$

(4) $\displaystyle\int_L\left(y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\right)$，$L$ 是从 $O\left(0,0,0\right)$ 到 $A\left(1,0,0\right)$ 再到 $B\left(1,1,0\right)$ 最后到 $C\left(1,1,1\right)$ 的折线段.

解：

$$\begin{aligned}&\int_L\left(y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\right)\\=&\left(\int_{L_{OA}}+\int_{L_{AB}}+\int_{L_{BC}}\right)\left(y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\right)\\=&\int_0^1\left(0+t\mathrm{d}t+t\mathrm{d}t\right)\\=&1\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int_L\left(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\right)$，$L$ 是 $x+y=2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2\left(x+y\right)$ 的交线，从原点看去是顺时针方向.

解：易知交线 $\begin{cases}x+y=2\\\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+z^2=2\end{cases}$，设 $\begin{cases}x=1-\cos\theta\\y=1+\cos\theta\\z=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases},\theta\in\left[0,2\pi\right]$，由于从原点看去是顺时针方向，所以 θ 从 0 积分到 2π.

$$\begin{aligned}&\int_L\left(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\right)\\=&\int_0^{2\pi}\Big(\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sqrt{2}\left(1-\cos\theta\right)\cos\theta\Big)\mathrm{d}\theta\\=&\int_0^{2\pi}\Big(\sin\theta-\sqrt{2}+\sin\theta\cos\theta+\sqrt{2}\cos\theta\Big)\mathrm{d}\theta\\=&-2\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

11.3.2　求向量场 $\boldsymbol{v}=\left(y+z\right)\boldsymbol{i}+\left(z+x\right)\boldsymbol{j}+\left(x+y\right)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 $L:x=a\sin^2t,y=2a\sin t\cos t,z=a\cos^2t\ \left(0\leqslant t\leqslant\pi\right)$ 参数增加方向的曲线积分.

解：

$$\begin{aligned}&\int_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\=&a^2\int_0^{\pi}\Big(\left(2\sin t\cos t+\cos^2t\right)2\sin t\cos t+2\left(\cos^2t-\sin^2t\right)+\left(\sin^2t+2\sin t\cos t\right)\left(-2\sin t\cos t\right)\Big)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2a^2\int_0^{\pi}\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)(1+\sin 2t)\,\mathrm{d}t\\
&=a^2\int_0^{\pi}(1+\sin 2t)\,\mathrm{d}\sin 2t\\
&=0
\end{aligned}
$$

11.3.4 利用 Green 公式，计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L (x+y)^2\,\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$，$L$ 是顶点为 $A(1,1)\,,B(3,3)\,,C(3,5)$ 的三角形的周界，沿反时针方向.

解：设 $D=\{(x,y)|\,1\leqslant x\leqslant 3, x\leqslant y\leqslant 2x-1\}$，由 Green 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L (x+y)^2\,\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y\\
=&\iint_D\left(\frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial (x+y)^2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_1^3\mathrm{d}x\int_x^{2x-1}(2x-2(x+y))\,\mathrm{d}y\\
=&\int_1^3\left(-3x^2+4x-1\right)\mathrm{d}x\\
=&-12
\end{aligned}
$$

(3) $\oint_L \left(yx^3+e^y\right)\mathrm{d}x+\left(xy^3+xe^y-2y\right)\mathrm{d}y$，$L$ 是对称于两坐标轴的闭曲线.

解：设 $D_1\subset D=\left\{L\text{围成的区域}\right\}$，$D_1$ 关于 y 轴，原点，x 轴，的对称分别为 D_2,D_3,D_4，且满足 $D=\cup_{i=1}^4 D_i,\sigma(D)=\sum_{i=1}^4\sigma(D_i)$，设 $P(x,y)=yx^3+e^y,Q(x,y)=xy^3+xe^y-2y$，由 Green 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L \left(yx^3+e^y\right)\mathrm{d}x+\left(xy^3+xe^y-2y\right)\mathrm{d}y\\
=&\left(\oint_{\partial D_1}+\oint_{\partial D_2}+\oint_{\partial D_3}+\oint_{\partial D_4}\right)(P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y)\\
=&\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q(-x,y)}{\partial(-x)}-\frac{\partial P(-x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\\
&+\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q(-x,-y)}{\partial(-x)}-\frac{\partial P(-x,-y)}{\partial(-y)}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q(x,-y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,-y)}{\partial(-y)}\right)\mathrm{d}\sigma\\
=&\iint_{D_1}\frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)-Q(-x,y)-Q(-x,-y)+Q(x,-y))\\
&-\frac{\partial}{\partial y}(P(x,y)+P(-x,y)-P(-x,-y)-P(x,-y))\,\mathrm{d}\sigma\\
=&\iint_{D_1}\left(2e^{-y}+2e^y-2e^{-y}-2e^y\right)\sigma\\
=&0
\end{aligned}
$$

(5) $\oint_{AMB}\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy+y^2\right)\mathrm{d}y$，$L$ 是从点 $A(0,-1)$ 沿直线 $y=x-1$ 到点 $M(1,0)$，再从 M 沿圆周 $x_2+y^2=1$ 到点 $B(0,1)$.

解：设 $P(x,y)=x^2+2xy-y^2,Q(x,y)=x^2-2xy+y^2$

$$
\begin{aligned}
&\oint_{AMB}\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy+y^2\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\left(P\left(x,x-1\right)+Q\left(x,x-1\right)\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\left(-\sin\theta\right)+Q\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin 3\theta+\frac{\cos 3\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{3}+\left(\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{\sin 3\theta}{6}+\frac{\sin\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
=&\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

11.3.6　计算曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

(1) L 为从点 $A\left(-a,0\right)$ 沿圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 到点 $B\left(a,0\right),a>0$.

解：设 $P\left(x,y\right)=\frac{-y}{x^2+y^2},Q\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$
\begin{aligned}
&\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\int_\pi^0\frac{-a\sin\theta\left(-a\sin\theta\right)+a^2\cos^2\theta}{a^2}\mathrm{d}\theta\\
=&\int_\pi^0\mathrm{d}\theta\\
=&-\pi
\end{aligned}
$$

(2) L 为从点 $A\left(-1,0\right)$ 沿抛物线 $y=4-\left(x-1\right)^2$ 到点 $B\left(3,0\right)$.

解：设 $\boldsymbol{r}\left(x\right)=\left(r\left(\theta\right)\cos\theta,r\left(\theta\right)\sin\theta\right),r\geqslant 0,P\left(x,y\right)=\frac{-y}{x^2+y^2},Q\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$，设路径与 x 轴围成的区域为 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|\,0\leqslant y\leqslant 4-\left(x-1\right)^2,x^2+y^2\geqslant a^2,a>0\right\}$，设 $\ell=\partial B\left(O,a\right)\cup\left(\mathbb{R}\times\left(0,+\infty\right)\right)$，方向为顺时针。

取 a 足够小，由于在 D 内 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，$\partial D$ 的路径是顺时针的，由 Green 公式：

$$
\begin{aligned}
&\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\left(-\iint_D+\int_\ell+\int_{(-1,0)}^{(-a,0)}+\int_{(a,0)}^{(3,0)}\right)\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)\\
=&-0-\pi+0+0\\
=&-\pi
\end{aligned}
$$

11.3.7　设 D 是平面上由简单闭曲线 L 围成的区域.

(1) (第二 Green 公式) 如果 $f\left(x,y\right)$ 有连续的二阶导数，证明 $\displaystyle\oint_L\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里 $\boldsymbol{n}$ 是曲线 L 的单位外法向量，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维的 Laplace 算子。因此，当 f 满足方程 $\Delta f=0$ 时，有 $\displaystyle\oint_L\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=0$.（提示：设单位外法向量为 $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$，则平面曲线 L 指向逆时针方向的单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}=-\cos\beta\boldsymbol{i}+\cos\alpha\boldsymbol{j}$）.

证明：设 L 的正向单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$，则单位外法向量 $\boldsymbol{n}=\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j}$，由 Green 公式：

$$\begin{aligned}
\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s &= \oint_L \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)\mathrm{d}s \\
&= \oint_{\partial D} -\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \Delta f \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是单位常向量，

证明：$\displaystyle\oint_L \cos(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0$

证明：设 $f(x,y)$ 满足 $\nabla f = \boldsymbol{\alpha} = \cos\beta\boldsymbol{i} + \sin\beta\boldsymbol{j}$，$\beta$ 为常值，则 $\Delta f = 0$

$$\begin{aligned}
\oint_L \cos(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s &= \oint_l \frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{n}|}\mathrm{d}s \\
&= \oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s \\
&= \iint_D \Delta f \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) 如果 $u(x,y), v(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明下列第二 Green 公式：

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明：设 L 的正向单位切向量为 $\boldsymbol{\tau} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$，则单位外法向量 $\boldsymbol{n} = \sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}$。由 Green 公式：

$$\begin{aligned}
&\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s \\
&= \oint_L (v\nabla u - u\nabla v)\cdot(\mathrm{d}y\boldsymbol{i} - \mathrm{d}x\boldsymbol{j}) \\
&= \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x + \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (\nabla u\nabla v - \nabla u\nabla v + v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

(4) 对于 $f \in \mathbb{C}^2(D)$，由 Green 公式：

$$\begin{aligned}
\oint_L f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s &= \oint_L f\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \\
&= \oint_L f\nabla f\cdot(\mathrm{d}y\boldsymbol{i} - \mathrm{d}x\boldsymbol{j}) \\
&= \oint_L \left(f\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - f\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right) \\
&= \iint_D \left((\nabla f)^2 + \Delta f \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

11.4　向量场在曲面上的积分

定理 11.5: 第二型曲面积分

设 S 是一张光滑的参数曲面：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in D$$

且满足 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 在 D 上光滑，(u,v) 是 S 的正向参数，D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域。设曲面 S 上有可积向量场 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，那么：

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_S (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

特别地，当 S 是闭合曲面的时候，如果设外侧是 S 的正方向，则记曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为向量场 $\boldsymbol{v}$ 通过 S 的通量 $\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

证明：由于 (u,v) 是 S 的正向参数，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，记 $(u,v)\in D$，且 $\boldsymbol{r}(D) = S$，于是：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
=& \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=& \iint_S \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=& \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

由于 (u,v) 是正向参数，所以相对地，yOz, zOx, xOy 平面分别对应的用 (u,v) 表示的有向面积元：

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

又 $\boldsymbol{r}(D) = S$，所以：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
=& \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=& \iint_S (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

1　计算下列第二型曲面积分

(1) $\iint_S (x+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

解：设变换 $\begin{cases} x=|a|\cos\varphi\sin\theta \\ y=|b|\sin\varphi\sin\theta \\ z=|c|\cos\theta \end{cases}$，$\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$，则 (θ,φ) 是正向参数，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=|ab|\sin\theta\cos\theta$，于是：

$$\begin{aligned}
&\iint_S (x+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(|a|\sin\theta\cos\varphi+|b^2|\sin^2\theta\sin^2\varphi+|c|\cos\theta)|ab|\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(|a^2b|\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi+|ab^3|\sin^3\theta\sin^2\varphi\cos\theta+|abc|\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi \\
=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(|ab^3|\sin^3\theta\sin^2\varphi\cos\theta+|abc|\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi \\
=&\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}|ab^3|\sin^3\theta\cos\theta+2\pi|abc|\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{4}{3}\pi|abc|5
\end{aligned}$$

(2) $\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是柱面 $x^2+z^2=R^2$ 在 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 两卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下的部分的外侧.

解：向量场为 $\boldsymbol{v}=(0,0,xyz)$，S 的法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{|R|}(x,0,z)$，于是

$$\begin{aligned}
&\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
=&\iint_S \frac{xyz^2}{|R|}\mathrm{d}S \\
=&\int_0^h y\mathrm{d}y\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|R|^3\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{h^2}{2}|R|^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\sin\theta \\
=&\frac{h^2|R|^3}{3}
\end{aligned}$$

(3) $\iint_S xy^2z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的 $x\leqslant 0$ 的一半远离球心的一侧.

解：设变换 $\begin{cases} x=|R|\sin\theta\cos\varphi \\ y=|R|\sin\theta\sin\varphi \\ z=|R|\cos\varphi \end{cases}$，$(\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$，易知 $(\theta\varphi)$ 是 S 的正向参数，$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta\varphi)}=R^2\sin^{\theta}\cos\varphi$，于是：

$$\begin{aligned}
&\iint_S xy^2z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
=&|R|^5\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi \\
=&|R|^5\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=|R|^5\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\cos^2\theta\mathrm{d}(-\cos\theta)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\varphi}{8}\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{16}{105}|R|^5\frac{\pi}{8}\\
&=\frac{2\pi}{105}|R^5|
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分 $(z\geqslant 0)$ 并取外侧.

解：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\
=&\iint_S(0,yz,0)\cdot(x,y,z)\mathrm{d}S\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\varphi\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\
=&\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\sin\theta\\
=&\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(5) $\displaystyle\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，远离原点的一侧.

解：平面 $x+y+z=1$ $(x,y,z\geqslant 0)$ 的一个参数表示为 $\boldsymbol{r}=(x,y,1-x-y)$，于是 $\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=1$, $\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=1$，$(x,y)\in\{(x,y)|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$，于是

$$
\begin{aligned}
&\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\left(x^2+y^2+(1-x-y)^2\right)\\
=&\int_0^1\left((1-x)x^2+\frac{2(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left(-\frac{5}{3}x^3+3x^2-2x+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(6) $\displaystyle\iint_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧.

解：设 $\boldsymbol{r}(\theta,z)=(z\cos\theta,z\sin\theta,z)$，于是 (θ,z) 是 S 的正向参数，$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}=z\cos\theta$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}=z\sin\theta$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)}=-z$，于是

$$
\begin{aligned}
&\iint_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left(z(\sin\theta-1)z\cos\theta+z(1-\cos\theta)z\sin\theta-z(\cos\theta-\sin\theta)z\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left(2\sin\theta-2\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
=&0
\end{aligned}
$$

(7) $\iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是通过上半球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{|a|}\iint_S (xz^2, x^2y, y^2z)\cdot(x,y,z)\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{|a|}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)a^6\sin\theta\mathrm{d}\varphi\\
=&|a|^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(\sin^3\theta\cos^2\theta+\sin^5\theta\frac{1-\cos4\varphi}{8}\right)\mathrm{d}\varphi\\
=&|a|^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\pi\sin^3\theta\cos^2\theta+\frac{\pi}{4}\sin^5\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
=&|a|^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(1-\cos^2\theta)\frac{1+7\cos^2\theta}{4}\mathrm{d}(-\cos\theta)\\
=&|a|^5\pi\int_0^1\frac{1+6t^2-7t^4}{4}\mathrm{d}t\\
=&\frac{2}{5}|a|^5\pi
\end{aligned}
$$

(8) $\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数，S 为直角平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧.

解：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_S (f(x), g(y), h(z))\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\
=&\iint_{[0,b]\times[0,c]}(f(1)-f(0))\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{[0,c]\times[0,a]}(g(1)-g(0))\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{[0,a]\times[0,b]}(h(1)-h(0))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&(f(1)-f(0))bc+(g(1)-g(0))ca+(h(1)-h(0))ab
\end{aligned}
$$

2　求场 $\boldsymbol{v} = (x^3-yz)\boldsymbol{i} - 2x^2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过长方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧表面的通量.

解：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iint_S (x^3-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^c(a^3-yz+yz)\mathrm{d}z-\int_0^c\mathrm{d}z\int_0^a 2x^2b\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b c\mathrm{d}y\\
=&a^3bc-\frac{2}{3}a^3bc+abc\\
=&\frac{a^3bc}{3}+abc
\end{aligned}
$$

11.5 Gauss 定理和 Stokes 定理

11.5.1 Gauss 定理

例子 11.1: 考虑光滑向量场 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 通过 $V = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ 的外表面的通量。

$$
\begin{aligned}
&\oiint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
=&\oiint_{\partial V} (P\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} + Q\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} + R\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S \\
=&\iint\limits_{[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]} (P(a_2, y, z) - P(a_1, y, z))\,\mathrm{d}S \\
&+ \iint\limits_{[c_1,c_2]\times[a_1,a_2]} (Q(x, b_2, z) - P(x, b_1, z))\,\mathrm{d}S \\
&+ \iint\limits_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} (R(x, y, c_1) - R(x, y, c_2))\,\mathrm{d}S \\
=&\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \\
=&\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

定义 11.1: X, Y, Z 型区域

对于区域 $D \in \mathbb{R}^2$，区域 $V \in \mathbb{R}^3$ 称为:

Z **型区域**：$V = \{(x, y, z) |\, z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y),\, (x, y) \in D\}$

X **型区域**：$V = \{(x, y, z) |\, x_1(y, z) \leqslant x \leqslant x_2(y, z),\, (y, z) \in D\}$

Y **型区域**：$V = \{(x, y, z) |\, y_1(x, z) \leqslant y \leqslant y_2(x, z),\, (x, z) \in D\}$

定理 11.6: X, Y, Z 型区域性质

设 $R(x, y, z)$ 光滑，$\boldsymbol{v}_3 = R(x, y, z)\boldsymbol{k}$，$V$ 是 Z 型区域，则

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{v}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V$$

定理 11.7: Gauss 定理

设 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 是 V 上的光滑向量场，V 是空间中分分片光滑曲面围成的闭区域。如果 V 可以同时分解成有限个互不重叠的 X 型、Y 型、Z 型子区域的并，那么有：

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}V$$

11.5.2 Stokes 定理

定理 11.8: Stokes 定理设 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 是 V 上的光滑向量场，若 S 是以 L 为边的分片具有二阶连续偏导数的光滑曲面，或者说 L 是有界曲面 S 的边 $L = \partial S$，那么有 Stokes 公式：

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}S$$

证明：不妨设 S 是光滑的，因为：若 S 不光滑，则可以分割成有限块光滑曲面，又由于在 S 内部，各光滑曲面的交线上积分方向相反，各积分一次，则在内部所以光滑子曲面边界上积分为 0，因此可以相加。设 S 的二阶光滑参数表示：

$$S:\quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k},\ (u, v) \in D$$

其中 (u,v) 是 S 的正向参数。由于光滑，则 ∂D 在 $\boldsymbol{r}$ 映射下为 ∂S，因此取 ∂D 的二阶光滑参数表示：

$$\partial D:\quad u=u(t),v=v(t),t\in[\alpha,\beta]$$

设其对于 ∂S 的二阶光滑参数表示：

$$L:\quad \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))=x(u(t),v((t)))\boldsymbol{i}+y(u(t),v((t)))\boldsymbol{j}+z(u(t),v((t)))\boldsymbol{k}$$

且 L 与 S 的方向相协调。由于 (u,v) 是正向参数，由 Green 公式：

$$\begin{aligned}
\oint_L P\mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta P\left(x(u(t),v((t))),y(u(t),v((t)),z(u(t),v((t)))\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\oint_{\partial D}P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

同理，$\oint_L Q\mathrm{d}y=\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\oint_L R\mathrm{d}z=\iint_S\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

因此，$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

□

1　计算下列曲面积分

(1) $\iint_S(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xy+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是以 $O(0,0,0),A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 为顶点的四面体的外表面.

解：由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}
&\iint_S(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xy+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iiint_V\nabla\cdot((x+1)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+(xy+z)\boldsymbol{k})\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V 3\mathrm{d}V\\
=&3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2) $\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体的外侧表面.

解：设 $V=\{(x,y,z)|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z\leqslant 1\}$，由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}&\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\partial V}(xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\=&\iiint_V\nabla\cdot(xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}V\\=&\iiint_V(x+y+z)\mathrm{d}V\\=&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z\\=&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)(1+x+y)}{2}\mathrm{d}y\\=&\int_0^1\frac{x^3-3x+2}{6}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(3) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解：由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}&\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iiint_V(2x+2y+2z)\mathrm{d}V\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{|R|}2\left(r\sin\theta\cos\varphi+a+r\sin\theta\sin\varphi+b+r\cos\theta+c\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{|R|}2r^3\left(\sin^2\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}r+\frac{8\pi}{3}|R|^3(a+b+c)\\=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{|R|}4\pi r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r+\frac{8\pi}{3}|R|^3(a+b+c)\\=&\frac{8\pi}{3}|R|^3(a+b+c)\end{aligned}$$

(4) $\iint_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的外侧.

解：由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}&\iint_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac12}\left(r^2\sin^2\theta+\left(r\cos\theta+\frac12\right)^2\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac12}\left(r^4\sin\theta+r^3\sin\theta\cos\theta+\frac14r^2\sin\theta\right)\mathrm{d}r\\=&2\pi\int_0^{\frac12}\left(2r^4+\frac12r^2\right)\mathrm{d}r\\=&\frac{\pi}{15}\end{aligned}$$

(5) $\iint_S(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧.

解：设 $V=\{(x,y,z)|\,0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$，设 V 以向外为正向。设 $D=\{(x,y,0)|x^2+y^2\leqslant 1\}$，设 D 以向上为正向。由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
&\iint_S (x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&-\iiint_V 3\mathrm{d}V-\iint_D (x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&-3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{B(O,z)}\mathrm{d}S-\iint_D (z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&-\pi+\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&-\pi
\end{aligned}$$

(6) $\iint_S (y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\,(z\geqslant 0)$ 的上侧.

解：设 $D=\{(x,y,0)|x^2+y^2\leqslant a^2\},V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\geqslant 0\}$，$D$ 以 $(-1,0,0)$ 为正方向，由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}
&\iint_S (y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\left(\oiint_{\partial V}-\iint_D\right)(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iiint_V \nabla\cdot((y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k})\mathrm{d}V-\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(\text{以 }(0,0,-1)\text{ 为正向})\\
=&0+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{|a|}r^3\mathrm{d}r\\
=&\frac{\pi}{2}a^4
\end{aligned}$$

2 求引力场 $\boldsymbol{F}=-km\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过下列闭曲面外侧的通量.

(1) 空间中任一包围质量 m (在原点) 的闭曲面;

解：注意到：原点是 $\boldsymbol{F}$ 的奇点。设曲面为 S，以向外为 S 的正方向，设 S 包围的区域为 V。取 $\delta>0$，使得 $\overline{B(O,\delta)}\subset S$. 由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\oiint_{\partial B(O,\delta)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_{V\setminus B(O,\delta)}\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V\\
=&\iiint_{V\setminus B(O,\delta)}-km\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}V\\
=&0
\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\oiint_{\partial B(O,\delta)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&-km\oiint_{\partial B(O,\delta)}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\delta}\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-km\oiint\limits_{\partial B(O,\delta)}\frac{1}{\delta^2}\mathrm{d}S\\
&=-4\pi km
\end{aligned}
$$

(2) 空间中任一不包围质量 m 的闭曲面;

解：由于 V 不包含奇点，所以由 Stokes 公式：

$$\oiint_{\partial V}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}S=0$$

(3) 质量 m 在光滑的闭曲面上.

解：

3 设区域 V 是由曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{2}=1$ 及平面 $z=1,z=-1$ 围成，S 为 V 的全表面外侧，又设 $\boldsymbol{V}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. 求积分 $\iint_S\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$.

解：由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\\
=&\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V\frac{(y^2+z^2-2x^2)+(z^2+x^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}V\\
=&0
\end{aligned}
$$

4 设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有连续的一阶导数，且 $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$.

解：由 Gauss 公式，等价于：对于半空间 $x>0$ 内任意的具有光滑边界的有界区域 V，均有：

$$\iiint_V\nabla\cdot\left(xf(x)\boldsymbol{i}-xyf(x)\boldsymbol{j}-e^{2x}z\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}V=\iiint_V\left(xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right)\mathrm{d}V\equiv0$$

由于 V 的任意性和 $f(x)$ 的光滑性，必有：$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,\forall x>0$
由于 $x>0$，化简为：

$$f'+\frac{1-x}{x}f=\frac{e^{2x}}{x}$$

于是：

$$f(x)=e^{-\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{e^x}{x}\left(e^x+C\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，所以必有 $C=1$，且已验证此时成立。因此，$f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$.

5 证明任意光滑闭曲面 S 围成的立体体积可以表成

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分沿 S 外侧进行.

证明：设 S 围成的立体区域为 V，以向外为 S 的正方向，由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{3}\oiint_{\partial V}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{3}\iiint_V\nabla\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V\mathrm{d}V\\
=&V
\end{aligned}
$$

□

6　证明 Archimedes 原理：物体 V 全部浸入液体中所受浮力等于物体同体积的液体的重量.

证明：设物体为表面光滑的单连通有界闭区域 V，压强函数 $p=p(z)=-\rho gz$，浮力为 F，以向外为 ∂V 的正方向，由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
F=&-\oiint_{\partial V}p(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iiint_V\rho g\mathrm{d}V\\
=&\rho g\sigma(V)
\end{aligned}
$$

7　设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量，S 是任意的光滑闭曲面，证明：$\oiint_S\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S=0$，其中 $(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 与曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.

证明：设 S 围成的区域为 V，设 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$，于是 $\nabla\cdot\boldsymbol{c}=0$，由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oiint_S\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S\\
=&\oiint_{\partial V}\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_V\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\mathrm{d}V\\
=&0
\end{aligned}
$$

□

9　计算下列曲线积分

(1) $\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$L$ 是顶点为 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 的三角形边界，从原点看去，L 沿顺时针方向.

解：设 $S=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，以 $(1,1,1)$ 为正方向，由 Stokes 公式

$$
\begin{aligned}
&\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\\
=&\iint_S(-1,-1,-1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iint_S(-1,-1,-1)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=-\sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S\\
&=-\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$L$ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\,(a>0,h>0)$ 的交线，从 x 轴的正方向看来，L 沿逆时针方向.

解：设变换 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=h(1-\cos\theta)\end{cases}$ $,\theta\in[0,2\pi]$，且 θ 是曲线的正向参数

$$
\begin{aligned}
&\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+x-y\mathrm{d}z\\
=&\int_0^{2\pi}\left(-a^2+ah(\sin\theta+\cos\theta-1)\right)\mathrm{d}\theta\\
=&-2\pi a(a+h)
\end{aligned}
$$

(3) $\displaystyle\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 与立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 表面的交线，从 z 轴正向看来，L 沿逆时针方向.

解：设 $S=\left\{(x,y,z)|\,x+y+z=\frac{3}{2}a,(x,y,z)\in[0,a]^3\right\}$，以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为 S 的正反向，由 Stokes 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\\
=&-2\iint_S (y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&-\frac{4\sqrt{3}}{3}\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S\\
=&-2\sqrt{3}a\sigma(S)\\
=&-\frac{9}{2}a^3
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\oint_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$，$L$ 是圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线，从 z 轴正方向看来，L 沿逆时针方向.

解：设曲面 $S=\{(x,y,z)|y=z,x^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$，于是 $\partial S=L$，S 的单位正向法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，由 Stokes 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\\
=&\iint_S \nabla\times(y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iint_S (0,-z,-y)\cdot\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}S\\
=&\iint_S \frac{\sqrt{2}z-\sqrt{2}y}{2}\mathrm{d}S\\
=&0
\end{aligned}
$$

(5) $\displaystyle\oint_L (y^2-y)\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}y+(x^2-x)\mathrm{d}z$，$L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，L 的方向与 z 轴正方向成右手系.

解：设 $S=\left\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, x+y+z=0\right\}$，以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为 S 的正方向，由 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}
&\oint_L (y^2-y)\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}y+(x^2-x)\mathrm{d}z\\
=&\iint_S (1-2z,1-2x,1-2y)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathrm{d}S\\
=&\frac{\sqrt{3}}{3}\iint_S (3-2x-2y-2z)\mathrm{d}S\\
=&\sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S\\
=&\sqrt{3}\pi a^2
\end{aligned}$$

(6) $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

解：由 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}
&\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z\\
=&\iint_S \nabla\times\left((y^2-z^2)\boldsymbol{i}+(2z^2-x^2)\boldsymbol{j}+(3x^2-y^2)\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}S\\
=&\iint_S \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

设 $\begin{cases} x=\frac{u+v}{2}\\ y=\frac{u-v}{2}\\ z=2-u\end{cases}$ $,(u,v)\in[-1,1]\times[-1,1],\boldsymbol{r}(u,v)=(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2},2-u)$，于是：

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|=\left|\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z\\
=&\iint_S \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S\\
=&\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}(-6-v)\mathrm{d}v\\
=&-24
\end{aligned}$$

10　在积分 $\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ 中，路径 L 是 Oxy 平面上正向的圆 $x^2+y^2=R^2,z=0$；利用 Stokes 公式化曲线积分为以 L 为边界所围区域 S 上的曲面积分.

(1) S 取 Oxy 平面上的圆面 $x^2+y^2\leqslant R^2$.

解：因为 $z\equiv 0$，所以退化为 Green 公式的情形，取 S 正向为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$：

$$\begin{aligned}
&\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z\\
=&\oint_{\partial S} x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\iint_S(-3x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{|R|}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(-3r^5\sin^2\theta\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{|R|}(-3r^5)\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{8}\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{\pi}{8}R^6
\end{aligned}
$$

(2) S 取半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解：$S=\left\{(x,y,z)|\,z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$，$S$ 正向为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x}{|R|},\frac{y}{|R|},\frac{z}{|R|}\right)$，由 Stokes 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z\\
=&\iint_S\nabla\times\left(x^2y^3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{x}{|R|},\frac{y}{|R|},\frac{z}{|R|}\right)\mathrm{d}S\\
=&\iint_S\left(0,0,-3x^2y^2\right)\cdot\left(\frac{x}{|R|},\frac{y}{|R|},\frac{z}{|R|}\right)\mathrm{d}S\\
=&\iint_S\frac{-3x^2y^2z}{|R|}\mathrm{d}S\\
=&\int_0^{|R|}\frac{z}{|R|}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left(-3(R^2-z^2)^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)|R|\mathrm{d}\theta\\
=&\int_0^{|R|}(-3z(R^2-z^2)^2)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{8}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{-R^6}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\\
=&-\frac{\pi}{8}R^6
\end{aligned}
$$

11　证明常向量场 $\boldsymbol{c}$ 沿任意光滑闭曲线的环量都等于 0.

证明：设光滑闭曲线 L 是分段光滑曲面 S 的边界，由 Stokes 公式：

$$\oint_L\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}s=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}S$$

由于 $\nabla\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 所以积分为 0.

□

12　求向量场 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 L 的环量。L 为 $x^2+y^2+z^2=R^2\,(z\geqslant0)$ 与 $x^2+y^2=Rx$ 的交线，从 x 轴正方向看来，L 沿逆时针方向.

解：由于 $x^2+y^2=Rx$，所以设 Oxy 平面上投影的变换 $\begin{cases}x=\frac{R}{2}\cos\varphi+\frac{R}{2}\\ y=\frac{R}{2}\sin\varphi\end{cases},\varphi\in[0,2\pi]$，又由于 $z^2=R^2-x^2-y^2=R^2-Rx$，因此 $z=\pm\sqrt{\frac{R^2}{2}(1-\cos\varphi)}=\pm R\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$，于是设变换

$$
\begin{cases}
x=\frac{R}{2}\cos2\theta+\frac{R}{2}=R\cos^2\theta\\
y=\frac{R}{2}\sin2\theta=R\sin\theta\cos\theta\\
z=R\sin\theta
\end{cases},\theta\in[0,2\pi]
$$

由此变换在 Oxy 上的投影知，θ 是 L 的正向参数，由 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
=&\int_0^{2\pi}\left(\left(y^2+z^2\right)\boldsymbol{i}+\left(z^2+x^2\right)\boldsymbol{j}+\left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{k}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&R^3\int_0^{2\pi}\left(\left(\cos^2\theta+1\right)\sin^2\theta\boldsymbol{i}+\left(\sin^2\theta+\cos^4\theta\right)\boldsymbol{j}+\cos^2\theta\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-\sin 2\theta\boldsymbol{i}+\cos 2\theta\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}\theta\\
=&R^3\int_0^{2\pi}\frac{12\cos\theta+15\cos 2\theta+4\cos 3\theta+\cos 6\theta-11\sin 2\theta+4\sin 4\theta+\sin 6\theta}{16}\mathrm{d}\theta\\
=&0
\end{aligned}$$

11.6　其他形式的曲线曲面积分

定理 11.9: 设 S 是空间逐段光滑曲面，S 的边 ∂S 是逐段光滑封闭曲线，则有：

$$\oint_{\partial S}\phi\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\phi$$

$$\oint_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\iint_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{v}$$

证明：取任意向量 $\boldsymbol{a}$，则有：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\oint_{\partial S}\phi\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
=&\oint_{\partial S}\phi\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
=&\iint_S\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}S\\
=&\iint_S\nabla\phi\times\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\iint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\oint_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\\
=&\oint_{\partial S}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\\
=&\oint_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times a)\\
=&\iint_S\nabla\times(\boldsymbol{v}\times a)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iint_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})\\
=&\iint_S\boldsymbol{a}\cdot((\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{v})\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\iint_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

定理 11.10: 设 V 是空间有界区域，V 的边界 ∂V 是逐段光滑封闭曲面，则：

$$\oiint_{\partial V}\phi\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\phi\mathrm{d}V$$

$$\oiint_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{v}=\iiint_V\nabla\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$$

证明：取任意向量 $\boldsymbol{a}$，则有：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\phi\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\phi\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_V\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a})\mathrm{d}V\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\iiint_V\nabla\phi\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{v}\\
=&\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{v}\\
=&\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_V\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}-\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}V\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\iiint_V\nabla\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

1　利用散度的积分表示，推导出在柱坐标系下的散度.

解：设空间中任意一点 P 对应柱坐标为 $(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0,z_0)$，设 V' 为以 $P'(r_0,\theta_0,z_0)$ 为顶点所作的一个立方体区域，三个棱向量为 $\Delta r\boldsymbol{i},\Delta\theta\boldsymbol{j},\Delta z\boldsymbol{k}$，设 $(x,y,z)=\boldsymbol{v}(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$ 把 V' 映成 V，则：

$$
\sigma(V)=\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta}\mathrm{d}\theta\int_{r_0}^{r_0+\Delta r}r\mathrm{d}r\int_{z_0}^{z_0+\Delta z}\mathrm{d}z\approx r\Delta r\Delta\theta\Delta z
$$

由于 $\lim\limits_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta z\to0}V=P$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r\\\boldsymbol{e}_\theta\\\boldsymbol{e}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}$，所以：

$$
\begin{aligned}
&\oint\!\!\!\!\oint_{\partial S}\boldsymbol{v}\left(r,\theta,z\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
\approx&\left(\boldsymbol{v}(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0,z_0+\Delta z)-\boldsymbol{v}(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0,z_0)\right)r\Delta r\Delta\theta\boldsymbol{e}_k\\
&+\left(\boldsymbol{v}((r_0+\Delta r)\cos\theta_0,(r_0+\Delta r)\sin\theta_0,z_0)(r+\Delta r)-\boldsymbol{v}(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0,z_0)r\right)\Delta\theta\Delta z\boldsymbol{e}_r\\
&+\left(\boldsymbol{v}(r_0\cos(\theta_0+\Delta\theta),r_0\sin(\theta_0+\Delta\theta),z_0)-\boldsymbol{v}(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0,z_0)\right)\Delta r\Delta z\boldsymbol{e}_\theta\\
\approx&\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\boldsymbol{v}}{r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{r\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)r\Delta r\Delta\theta\Delta z
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v}\left(r,\theta,z\right)\big|_{(r_0,\theta_0,z_0)}&=\lim_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta z\to0}\frac{1}{r\Delta r\Delta\theta\Delta z}\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\boldsymbol{v}}{r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{r\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\bigg|_{(r_0,\theta_0,z_0)}\\
&=\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\bigg|_{(r_0,\theta_0,z_0)}
\end{aligned}
$$

因此，散度为 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{v_r}{r}+\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

2　利用散度的积分表示，推导出在球坐标系下的散度.

解：设球坐标变换 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ 把以 (r,θ,φ) 为顶点，$\Delta r\boldsymbol{i},\Delta\theta\boldsymbol{j},\Delta\varphi\boldsymbol{k}$ 为相邻 3 边向量的长方体 V' 映射到 V，于是 $\lim\limits_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi\to 0} V=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$，易知 (r,θ,φ) 对应切向量 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_\theta\\ \boldsymbol{e}_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}$，设向量场 $\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$，以向外为 V 的正方向，于是：

$$
\begin{aligned}
&\oint\!\!\!\oint_{\partial V}\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
\approx&\Big(\boldsymbol{v}(r+\Delta r,\theta,\varphi)\,(r+\Delta r)^2-\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)r^2\Big)\Delta\theta\sin\theta\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{e}_r\\
&+(\boldsymbol{v}(r,\theta+\Delta\theta,\varphi)r\Delta r\Delta\varphi\sin(\theta+\Delta\theta)-\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)r\Delta r\Delta\varphi\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\theta\\
&+(\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi+\Delta\varphi)-\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi))\,r\Delta r\Delta\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\\
\approx&\left(2\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}r\right)r\Delta r\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{e}_r+\left(\boldsymbol{v}r\Delta r\Delta\varphi\cos\theta\Delta\theta+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}r\Delta r\Delta\varphi\Delta\theta\sin\theta\right)\cdot\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\varphi}r\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\\
=&\left(2\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}r\right)r\Delta r\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{e}_r+\left(\boldsymbol{v}\cos\theta+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta}\sin\theta\right)r\Delta r\Delta\varphi\Delta\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\varphi}r\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

由于

$$
\sigma(V)=\int_r^{r+\Delta r}r^2\mathrm{d}r\int_\theta^{\theta+\Delta\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}\mathrm{d}\varphi\approx r^2\Delta r\Delta\varphi\sin\theta\Delta\theta
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi\to 0}\frac{1}{\sigma(V)}\oint\!\!\!\oint_{\partial V}\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
\approx&\lim_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi\to 0}\left(\frac{2\boldsymbol{v}}{r}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\right)\cdot\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\boldsymbol{v}\cos\theta}{r\sin\theta}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{r\partial\theta}\right)\cdot\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{r\sin\theta\partial\varphi}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\\
=&\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

3　设函数 $u(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 所围成的的闭区域 V 上具有直到二阶的连续偏微商，且满足 Laplace 方程：

$$
\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0
$$

设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位外法向场，试证明：

(1) $\oint\!\!\!\oint_S\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\oint\!\!\!\oint_S\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\\
=&\oint\!\!\!\oint_S\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\
=&\oint\!\!\!\oint_S\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_V\nabla\cdot\nabla u\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V\Delta u\mathrm{d}V\\
=&0
\end{aligned}
$$

(2) $\oiint_S u\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_V(\nabla u)^2\,\mathrm{d}V$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\\
=&\oiint_S u\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\oiint_S \frac{\nabla u^2}{2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_V \frac{\nabla^2u^2}{2}\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V \frac{\nabla\left(\nabla u^2\right)}{2}\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V \nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V (\nabla u)^2\,\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

11.7　保守场

2　求下列曲线积分

(1) $\int_L(2x+y)\mathrm{d}x+(x+4y+2z)\mathrm{d}y+(2y-6z)\mathrm{d}z$，其中 L 由点 $P_1(a,0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$ 到 $P_2(0,a,0)$，再由 P_2 沿直线 $\begin{cases}z+y=a\\ x=0\end{cases}$ 到点 $P_3(0,0,a)$；

(2) $\int_{\widehat{AMB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$,其中 $\widehat{AMB}$ 是柱面螺线 $x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi,z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ 上点 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 这一段.

解：设向量场 $\boldsymbol{v}=\left(x^2-yz,y^2-zx,z^2-xy\right)$，于是 $\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}$ 是保守场。因此

$$
\begin{aligned}
&\int_{\widehat{AMB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z\\
=&\int_A^B\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}r\\
=&\int_0^h z^2\mathrm{d}z\\
=&\frac{h^3}{3}
\end{aligned}
$$

3　证明下列向量场是有势场，并求出他们的势函数

(2) $\boldsymbol{v}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(2y+z+x)\boldsymbol{j}+xy(2z+x+y)\boldsymbol{k}$;

解：$\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial x}\\ yz(2x+y+z)&zx(2y+z+x)&xy(2z+x+y)\\ \boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$，因此是有势场。

设势函数 $\phi(x,y,z)$ 为光滑函数，由 $\nabla\phi=\boldsymbol{v}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(2y+z+x)\boldsymbol{j}+xy(2z+x+y)\boldsymbol{k}$ 知，$\frac{\partial\phi}{\partial x}=yz(2x+y+z),\frac{\partial\phi}{\partial y}=xz(2y+z+x),\frac{\partial\phi}{\partial z}=xy(2z+x+y)$，设 $\phi(0,0,0)=C$，积分得：

$$\phi(x,y,z)=\int_O^{(x,y,z)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}r+C$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^z xy(2z+x+y)\mathrm{d}z+C\\
&=xyz(x+y+z)+C
\end{aligned}
$$

4 当 a 取何值时，向量场 $F=\left(x^2+5ay+3yz\right)\boldsymbol{i}+(5x+3axz-2)\boldsymbol{j}+[(a+2)\,xy-4z]\,\boldsymbol{k}$ 是有势场，并求出此时的势函数.

解：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{F}=&\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ x^2+5ay+3yz & 5x+3axz-2 & (a+2)\,xy-4z\\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{vmatrix}\\
=&(3ax-(a+2)x)\,\boldsymbol{i}+((a+2)y-3y)\,\boldsymbol{j}+(5a+3z-5-3az)\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

因此 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\mathbf{0}\iff a=1$，则 $\boldsymbol{F}=\left(x^2+5y+3yz\right)\boldsymbol{i}+(5x+3xz-2)\boldsymbol{j}+(3xy-4z)\,\boldsymbol{k}$，设 $(0,0,0)$ 处势函数值为 C，则势函数：

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z)=&\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(5x-2)\mathrm{d}y+\int_0^z(3xy-4z)\mathrm{d}z+C\\
=&\frac{x^3}{3}+5xy-2y+3xyz-2z^2+C
\end{aligned}
$$

6 验证下列积分与路径无关，并求出它们的值.

(2) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,2)}\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$;

解：设向量场 $\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\boldsymbol{j}$，于是：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\\
=&-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}\\
=&0
\end{aligned}
$$

因此 $\boldsymbol{v}$ 是 $(-\infty,+\infty)^2$ 上的保守场，则：

$$
\begin{aligned}
&\int_{(1,1)}^{(2,2)}\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_{(1,1)}^{(2,2)}\boldsymbol{v}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
=&\int_1^2\boldsymbol{v}(t,t)\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}t\\
=&\int_1^2\left(\frac{1}{t}\sin 1-\frac{1}{t}\cos 1+1+\frac{1}{t}\cos 1-\frac{1}{t}\sin 1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\
=&\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

(6) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上.

解：设向量场 $\boldsymbol{v}=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$，有：

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}=&\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{vmatrix}\\ =&-\frac{yz-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{i}-\frac{xz-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j}-\frac{xy-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}\\ =&\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{v}$ 是曲面连通区域 $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$ 上的保守场，所以：

$$\begin{aligned}&\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ =&\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{|a|}\\ =&\int_{x_1}^{x_2}\frac{x\mathrm{d}x}{|a|}+\int_{y_1}^{y_2}\frac{y\mathrm{d}y}{|a|}+\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\mathrm{d}z}{|a|}\\ =&\frac{x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+z_2^2-z_1^2}{2|a|}\end{aligned}$$

7　设 $f(u)$ 是连续函数，L 是分段光滑的任意闭曲线，证明：

(1) $\displaystyle\oint_L f\left(x^2+y^2\right)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$

证明：设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},r(x,y)=|\boldsymbol{r}|$，于是：

$$\oint_L f\left(x^2+y^2\right)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\oint_L f\left(r^2\right)\mathrm{d}\left(r^2\right)=0$$

(2) $\displaystyle\oint_L f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=0.$

证明：设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},r(x,y)=|\boldsymbol{r}|$，于是：

$$\oint_L f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\frac{1}{2}\oint_L f(r)\,\mathrm{d}\left(r^2\right)=\oint_L f(r)r\mathrm{d}r=0$$

9　试求函数 $f(x)$，使曲线积分 $\displaystyle\int_L\left(f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}\right)y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关.

解：设向量场 $\boldsymbol{v}(x,y)=\left(f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}\right)y\boldsymbol{i}+f'(x)\boldsymbol{j}$，当积分与路径无关时，$\boldsymbol{v}$ 时，由 Green 公式知：

$$0=\frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial\left(f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}\right)y}{\partial y}=f''(x)-f'(x)-6f(x)-\mathrm{e}^{-2x}\qquad(*)$$

求解二阶常系数线性微分方程 $(*)$ 的特征方程 $\lambda^2-\lambda-6=0$ 得特征根 $\lambda_1=3,\lambda_2=-2$. 于是方程 $(*)$ 的基本解组为：

$$f_1(x)=\mathrm{e}^{3x},\ f_2(x)=\mathrm{e}^{-2x}$$

于是，方程 $(*)$ 的特解为：

$$f_0(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{f_1(t)f_2(x)-f_2(t)f_1(x)}{W(t)}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{x_0}^{x}\frac{f_1(t)f_2(x)-f_2(t)f_1(x)}{\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t)\\ f_1'(t) & f_2'(t)\end{vmatrix}}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\
&=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{3t-2x}-\mathrm{e}^{3x-2t}}{-5\mathrm{e}^{t}}e^{-2t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{25}\mathrm{e}^{3x-5x_0}-\frac{5(x-x_0)+1}{25}\mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}
$$

不妨取 $x_0=0$，则 $f_0(x)=\frac{1}{25}\mathrm{e}^{3x}-\frac{5x+1}{25}\mathrm{e}^{-2x}$，注意到 $\frac{1}{25}\mathrm{e}^{3x}$ 与 $f_1(x)$ 线性相关，$\frac{1}{25}\mathrm{e}^{-2x}$ 与 $f_2(x)$ 线性相关，于是：

$$
f(x)=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\frac{x}{5}\mathrm{e}^{-2x},\quad \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}
$$

10　已知 $\alpha(0)=0,\alpha'(0)=2,\beta(0)=2.$

(1) 求 $\alpha(x),\beta(x)$ 使线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路线无关；其中

$$
P(x,y)=\left(2x\alpha'(x)+\beta(x)\right)y^2-2y\beta(x)\tan 2x,\ Q(x,y)=\left(\alpha'(x)+4x\alpha(x)\right)y+\beta(x)
$$

解：当线积分与路径无关时，$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，也即：

$$
y\alpha''(x)+4y\alpha(x)+\beta'(x)+\left(2\tan 2x-2y\right)\beta(x)=0
$$

分类变量，得：

$$
y\left(\alpha''(x)+4\alpha(x)-2\beta(x)\right)+\beta'(x)+2\tan 2x\beta(x)=0
$$

由于 (x,y) 任意，所以得到方程组：

$$
\begin{cases}\beta'(x)+2\tan 2x\beta(x)=0 & (1)\\ \alpha''(x)+4\alpha(x)=2\beta(x) & (2)\end{cases}
$$

首先求解方程 (1)：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\int 2\tan 2x\mathrm{d}x}\beta(x)\right)=0\\
\Longrightarrow\ &\beta(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\tan 2x\mathrm{d}x}=C\cos 2x,\ C\in\mathbb{R}\\
\Longrightarrow\ &\beta(x)=2\cos 2x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

将 (1) 的结果代入，求解 (2)：

$$
\alpha''(x)+4\alpha(x)=4\cos 2x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)
$$

解特征方程 $\lambda^2+4=0$，得特征根 $\lambda_1=2\mathrm{i},\lambda_2=-2\mathrm{i}$，于是基本解系：

$$
\begin{cases}\alpha_1(x)=\cos 2x\\ \alpha_2(x)=\sin 2x\end{cases},\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)
$$

由常数变易法得特解：

$$
\alpha_0(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\alpha_1(t)\alpha_2(x)-\alpha_2(t)\alpha_1(x)}{W(t)}4\cos 2t\mathrm{d}t
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{x_0}^{x}\frac{\cos 2t\sin 2x-\sin 2t\cos 2x}{2\cos 2x\cos 2x-\sin 2x(-2\sin 2x)}4\cos 2t\mathrm{d}t\\
&=\int_{x_0}^{x}\left(\sin 2x-\sin(4t-2x)\right)\mathrm{d}t\\
&=x\sin 2x-\left(x_0+\frac{1}{4}\sin 4x_0\right)\sin 2x+\frac{1-\cos 4x_0}{4}\cos 2x
\end{aligned}
$$

于是 (2) 的解为：

$$\alpha(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\sin 2x$$

代入初值得：

$$\alpha(x)=(x+1)\sin 2x$$

综上：

$$\begin{cases}\alpha(x)=(x+1)\sin 2x\\ \beta=2\cos 2x\end{cases},\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

(2) 求 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(0,2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

解：

$$\begin{cases}P(x,y)=2y\left(xy-2\right)\sin 2x+2y^2\left(2x^2+2x+1\right)\cos 2x\\ Q(x,y)=2\left(xy+y+1\right)\cos 2x+y\left(2x+1\right)^2\sin 2x\end{cases}$$

于是：

$$\int_{(0,0)}^{(0,2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^2 Q(0,y)\mathrm{d}y=\int_0^2 2(y+1)\mathrm{d}y=8$$

11 设函数 $Q(x,y)$ 在 Oxy 平面上光滑，曲线积分 $\displaystyle\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对于任意 t 恒有 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，求 $Q(x,y)$.

解：由于向量场 $\boldsymbol{v}(x,y)=2xy\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 是保守场，所以：

$$0=\frac{\partial Q}{\partial x}-2x\iff\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

由于 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，且任何环路积分均为 0，所以 $\forall t$, $\displaystyle\int_{(t,1)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，于是：

$$0=\int_{(t,1)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\left(\int_{(t,1)}^{(1,1)}+\int_{(1,1)}^{(1,t)}\right)2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=1-t^2+\int_1^t Q(1,y)\mathrm{d}y$$

对 t 求导得：

$$Q(1,y)=2y$$

因此对 x 积分得：

$$Q(x,y)=Q(1,y)+\int_1^x\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}t=x^2+y-1$$

12 求解微分方程

(1) $\left(xy^2+2y-2y\cos x-y\sin x\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y+2x+\cos x-2\sin x\right)\mathrm{d}y=0$

解：因为：

$$\frac{\partial\left(x^2y+2x+\cos x-2\sin x\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2+2y-2y\cos x-y\sin x\right)}{\partial y}=0$$

所以存在 $\phi(x,y)$ 使得 $\nabla\phi=\left(xy^2+2y-2y\cos x-y\sin x\right)\boldsymbol{i}+\left(x^2y+2x+\cos x-2\sin x\right)\boldsymbol{j}$，于是原方程化为 $\mathrm{d}\phi(x,y)=0$. 又：

$$\begin{aligned}\phi(x,y)=&\phi(x_0,y_0)+\int_{x_0}^{x}\left(ty_0^2+2y_0-2y_0\cos t-y_0\sin t\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(x^2t+2x+\cos x-2\sin x\right)\mathrm{d}t\\=&\phi(x_0,y_0)-\frac{1}{2}x_0^2y_0^2-2x_0y_0+2y_0\sin x_0-y_0\cos x_0+\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y\cos x-2y\sin x\\=&\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y\cos x-2y\sin x+C\end{aligned}$$

因此，解为隐函数 $x^2y^2+4xy+2y\cos x-4y\sin x=C,\forall C\in\mathbb{R}$

(2) $2xy\mathrm{d}x+\left(y^2-x^2\right)\mathrm{d}y=0$

解：易见 $\dfrac{\partial\left(y^2-x^2\right)}{\partial x}-\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=-4x\not\equiv 0$，因此不存在数量场 $\phi(x,y)$，使 $\mathrm{d}\phi=2xy\mathrm{d}x+\left(y^2-x^2\right)\mathrm{d}y$.

若 $\mathrm{d}y=0$，代入得到 $y=0$ 为方程的解。若 $\mathrm{d}y\neq 0$，则化为：

$$xy\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x^2-y^2}{2}$$

显然 $x\not\equiv 0$，且 $y\not\equiv 0$ 因此：

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$$

代换 $\dfrac{x}{y}=t$，于是方程化为：

$$2y\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+t+\frac{1}{t}=0$$

注意到：$\mathrm{d}\ln|y|=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，所以化简为：

$$0=2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\ln|y|}+t+\frac{1}{t}=2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\ln|y|}+t+\frac{1}{t}$$

由于 $t+\dfrac{1}{t}\neq 0$，因此，取倒数，得：

$$\frac{\mathrm{d}\ln|y|}{\mathrm{d}t}+\frac{2t}{t^2+1}=0$$

对 t 积分，得：

$$\ln|y|+\ln\left(t^2+1\right)=\ln\left(\frac{x^2+y^2}{|y|}\right)=\ln\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{y^2}=C_1$$

因此，方程的解为：

$$y^2-C\left(x^2+y^2\right)^2=0,\,C\geqslant 0$$

13　设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=2$，且

$$\left(\mathrm{e}^x \sin y + x^2 y + f(x) y\right) \mathrm{d}x + \left(f'(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2x\right) \mathrm{d}y = 0$$

为一个全微分方程，求 $f(x)$ 以及此全微分方程的通解.

解：由于是全微分方程，所以存在可微的 $\phi(x,y)$ 使得 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \mathrm{e}^x \sin y + x^2 y + f(x) y, \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = f'(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2x$. 由于 $\dfrac{\partial (\nabla \phi \cdot \boldsymbol{j})}{\partial x} - \dfrac{\partial (\nabla \phi \cdot \boldsymbol{i})}{\partial y} = 0$，所以得常系数二阶线性方程：

$$f''(x) - f(x) = x^2 - 2$$

求解它的特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0$，得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$，因此方程的基本解系为：

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x, f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

注意到：令 $f_0(x) = -x^2$，于是 $f_0''(x) - f_0(x) = x^2 - 2$，这说明 $f_0(x) = -x^2$ 是方程的一个特解，因此：

$$f(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} - x^2$$

代入初值条件 $f(0)=0, f'(0)=2$，则有：

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - x^2$$

将 $f(x)$ 代入全微分方程得：$(\mathrm{e}^x(y + \sin y) - \mathrm{e}^{-x} y) \mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x(1 + \cos y) + \mathrm{e}^{-x}) \mathrm{d}y = 0$，积分得：

$$\begin{aligned} u(x,y) =& \int_0^x 0 \mathrm{d}x + \int_0^y \left(\mathrm{e}^x (1 + \cos t) + \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}t \\ =& \mathrm{e}^x y + e^x \sin y + \mathrm{e}^{-x} y + C \end{aligned}$$

14　确定常数 λ，使在右半平面 $x > 0$ 上的向量场 $\boldsymbol{v} = 2xy(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{i} - x^2(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解：因为 $\boldsymbol{v}$ 是某函数梯度，所以

$$0 = \frac{\partial \left(2xy(x^4+y^2)^\lambda\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(x^2(x^4+y^2)^\lambda\right)}{\partial x} = 4x\left(x^4+y^2\right)^\lambda (\lambda+1)$$

解得 $\lambda = -1$，由于 $\nabla u(x,y) = \boldsymbol{v}(x,y)$，所以 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2xy}{x^4+y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{x^4+y^2} \end{cases}$，于是：

$$\begin{aligned} u(x,y) =& \int_{x_0}^x \frac{2ty_0}{t^4+y_0^2} \mathrm{d}t - \int_{y_0}^y \frac{x^2}{x^4+t^2} \mathrm{d}t + u(x_0,y_0) \\ =& \int_{x_0}^x \frac{y_0}{(t^2)^2 + y_0^2} \mathrm{d}\left(t^2\right) - \arctan\frac{y}{x^2} + \arctan\frac{y_0}{x^2} + u(x_0,y_0) \\ =& \arctan\frac{x^2}{y_0} - \arctan\frac{x_0^2}{y_0} - \arctan\frac{y}{x^2} + \arctan\frac{y_0}{x^2} + u(x_0,y_0) \\ =& -\arctan\frac{y}{x^2} + C \end{aligned}$$

11.8　微分形式的积分

微分形式的种类 (以 $\mathbb{R}^3$ 为例)

1. 0 形式：$\omega_\phi^0 = \phi(x,y,z)$，对应一个数量场 $\phi(x,y,z)$.
2. 1 形式：$\omega_{\boldsymbol{v}}^1 = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$，对应一个向量场 $\boldsymbol{v} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$.
3. 2 形式：$\omega_{\boldsymbol{v}}^2 = P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，对应一个向量场 $\boldsymbol{v} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$.
4. 3 形式：$\omega_\phi^3 = \phi(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，对应一个数量场 $\phi(x,y,z)$.

微分形式的积分

1. 1 形式的积分：定向曲线上的向量场积分
$$\int_{L_{AB}} \omega_{\boldsymbol{v}}^1 = \int_{L_{AB}} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z) = \int_{L_{AB}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
2. 2 形式的积分：定向曲面 $(S,\boldsymbol{n})$ 上的向量场积分
$$\int_S \omega_{\boldsymbol{v}}^2 = \iint_S (P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
3. 3 形式的积分：三重积分
$$\int_V \omega_\phi^3 = \iiint_V \phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

统一的 Stokes 公式

1. Green 公式：边界光滑的区域 $D\subset\mathbb{R}^2$，向量场 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$
$$\int_{\partial D} \omega_{\boldsymbol{v}}^1 = \int_{\partial D} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \omega_{\nabla\times\boldsymbol{v}}^2 = \int_D \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1$$
2. Stokes 公式：边界光滑的曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$，向量场 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$
$$\begin{aligned}&\int_{\partial S} \omega_{\boldsymbol{v}}^1 = \int_{\partial S} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z)\\ =&\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ =&\int_S \omega_{\nabla\times\boldsymbol{v}}^2 = \int_S \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1\end{aligned}$$
3. Gauss 公式：边界光滑的立体区域 $V\subset\mathbb{R}^3$，向量场 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$
$$\begin{aligned}&\int_{\partial V} \omega_{\boldsymbol{v}}^2 = \iint_{\partial V} (P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ =&\int_V \omega_{\nabla\times\boldsymbol{v}}^3 = \int_V \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^2\end{aligned}$$

第 11 章综合习题

11.3　求平面上下列两个椭圆
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a > b > 0$$
内部公共区域的面积.

解：$E_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, E_2:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，于是，根据对称性，由 Green 公式：

$$\begin{aligned}\sigma\left(E_1\cap E_2\right)&=\iint_{E_1\cap E_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=8\oint_{\partial(E_1\cap E_2)\cap\{x\geqslant y\geqslant 0\}}x\mathrm{d}y\\&=8\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\mathrm{d}y+8\left(\int_{\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}^{(0,0)}+\int_{(0,0)}^{(b,0)}\right)x\mathrm{d}y\\&=8ab\int_0^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\\&=8ab\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{1+\cos 2z}{2}\mathrm{d}z-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\\&=4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

因此，公共区域面积为 $4ab\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

11.4　(Poisson 公式) 设 $S:\ x^2+y^2+z^2=1$，$f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，求证：

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(kt)\,\mathrm{d}t$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

证明：注意到：$ax+by+cz=(x,y,z)\cdot(a,b,c)$，因此，设正交变换 $\boldsymbol{\varphi}$：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{k}&\frac{b}{k}&\frac{c}{k}\\\frac{b}{k}&\frac{-a}{k}&0\\\frac{ac}{k^2}&\frac{bc}{k^2}&\frac{-a^2-b^2}{k^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix},\boldsymbol{\varphi}(x,y,z)=(u,v,w)$$

于是 $\boldsymbol{\varphi}(a,b,c)=(k,0,0),\boldsymbol{\varphi}(S)=S':u^2+v^2+w^2=1,|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})|=1$，由于 $\boldsymbol{J}(\varphi)$ 是正交矩阵：

$$\boldsymbol{\varphi}(a,b,c)\cdot\boldsymbol{\varphi}(x,y,z)=(a,b,c)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})^T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(a,b,c)\cdot(x,y,z)$$

因此，设坐标变换 $\begin{cases}u=u\\v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta\\w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta\end{cases}$，则有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\right|&=\left\|\begin{matrix}1&\frac{-u\cos\theta}{\sqrt{1-u^2}}&\frac{-u\sin\theta}{\sqrt{1-u^2}}\\0&-\sqrt{1-u^2}\sin\theta&\sqrt{1-u^2}\cos\theta\\\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\end{matrix}\right\|\\&=\left|-u\boldsymbol{e}_1-\sqrt{1-u^2}\cos\theta\boldsymbol{e}_2-\sqrt{1-u^2}\sin\theta\boldsymbol{e}_3\right|\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S\\
=&\iint_S f((a,b,c)\cdot(x,y,z))\,\mathrm{d}S\\
=&\iint_{S'} f((k,0,0)\cdot(u,v,w))\,\mathrm{d}S\\
=&\iint_{S'} f(ku)\,\mathrm{d}S\\
=&\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_0^{2\pi} f(ku)\,\mathrm{d}\theta\\
=&2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

11.5 设 $S(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分，且

$$F(x,y,z)=1-\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

求证：当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{18}\left(3-t^2\right)^2$$

证明：设正交变换 $\boldsymbol{\varphi}$：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix},\boldsymbol{\varphi}(x,y,z)=(u,v,w)$$

于是 $\boldsymbol{\varphi}(\{(x,y,z)|\,x+y+z=1\})=\left\{(u,v,w)|\,u=\frac{\sqrt{3}}{3}t\right\}$，
$\boldsymbol{\varphi}\left(\left\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2=1\right\}\right)=\left\{(u,v,w)|\,u^2+v^2+w^2=1\right\}$，因此：

$$\begin{aligned}
\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S&=\iint_{\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},v,w\right)\middle|u^2+v^2=1-\frac{t^2}{3}\right\}}\left(1-\frac{t^2}{3}-v^2-w^2\right)\mathrm{d}S\\
&=\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{t^2}{3}-r^2\right)r\,\mathrm{d}\theta\\
&=2\pi\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\left(r-\frac{t^2}{3}r-r^3\right)\mathrm{d}r\\
&=2\pi\left(\frac{3-t^2}{6}r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\\
&=\frac{\pi}{18}\left(3-t^2\right)^2
\end{aligned}$$

11.6 设 $f(t)$ 在 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续，证明：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t$$

证明：设坐标变换 $\boldsymbol{T}$：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ \frac{ac}{a^2+b^2+c^2} & \frac{bc}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-a^2-b^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

易知，$\boldsymbol{T}$ 是正交方阵，因此：$u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2$，$\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = |\det \boldsymbol{T}| = 1$，因此：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

设坐标变换 $\begin{cases} u = rt \\ v = \sqrt{1-t^2}r\cos\theta \\ w = \sqrt{1-t^2}r\sin\theta \end{cases}$ $,\theta\in[0,2\pi], t\in[-1,1], r\in[0,,1]$，则有：

$$\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,t,\theta)}\right| = \left\|\begin{matrix} t & r & 0 \\ \sqrt{1-t^2}\cos\theta & \frac{-tr\cos\theta}{\sqrt{1-t^2}} & -\sqrt{1-t^2}r\sin\theta \\ \sqrt{1-t^2}\sin\theta & \frac{-tr\sin\theta}{\sqrt{1-t^2}} & \sqrt{1-t^2}r\cos\theta \end{matrix}\right\| = r^2$$

因此：

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ =&\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t \\ =&\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

11.7　设 D 是平面上光滑封闭曲线 L 围成的区域，$f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，求证当 $f(x)$ 在 L 上恒为零时，它在 D 上也恒为零.

证明：由第 11.9 题知，f 的最大最小值均在 L 上取，所以 $f(x,y)\equiv 0, \forall(x,y)\in\overline{D}$　□

证明：要证明 $f\equiv 0$，只需证 $\nabla f\equiv \mathbf{0}$，只需证 $(\nabla f)^2\equiv 0$，只需证 $\iint_D (\nabla f)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

由于 $\nabla\cdot f\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\left(f\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\nabla f)^2 + f\Delta f = (\nabla f)^2$. 由 Gauss 公式，只需证

$$0 = \iint_D \nabla\cdot f\nabla f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L f\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$$

显然成立。　□

11.8　$\mathbb{R}^2$ 中的调和函数平均值原理

设 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续的偏导数，且满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. 求证：对 $0\leqslant r\leqslant R$，有 $f(P_0)=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 $P_0=(x_0,y_0)$，L 是以 P_0 为圆心，r 为半径的圆.

证明：由第二 Green 公式：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi r}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \\ =&\frac{1}{2\pi r}\int_L\left(f(P_0)+(f(x,y)-f(P_0))\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=f(P_0)+\frac{1}{2\pi r}\int_L\left(\int_0^r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\\
&=f(P_0)+\frac{1}{2\pi r}\int_0^r\left(\int_{\partial B(P_0,t)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\\
&=f(P_0)+\frac{1}{2\pi r}\int_0^r\left(\iint_{B(P_0,t)}\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\
&=f(P_0)
\end{aligned}
$$

推论 11.1: $\mathbb{R}^3$ 中的调和函数平均值原理 设 $f(x,y,z)$ 是定义在闭区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上的调和函数，满足 $\Delta f=\nabla\cdot\nabla f=0$，对于任意的 $B(P,R)\subset\Omega$，有：

$$
\begin{aligned}
4\pi R^2 f(P)&=\oiint\limits_{\partial B(P,R)}f(x,y,z)\mathrm{d}S\\
\frac{4}{3}\pi R^3 f(P)&=\iiint\limits_{B(P,R)}f(x,y,z)\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
\oiint\limits_{\partial B(P,R)}f(x,y,z)\mathrm{d}S=&\oiint\limits_{\boldsymbol{r}\in\partial B(O,R)}f\left(P+\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}S\\
=&\oiint\limits_{\boldsymbol{r}\in\partial B(O,R)}\left(f(P)+\int_0^R\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\bigg|_{P+\frac{r}{R}\boldsymbol{r}}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}S\\
=&4\pi R^2 f(P)+\int_0^R\left(\oiint\limits_{\boldsymbol{r}\in\partial B(O,R)}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\bigg|_{P+\frac{r}{R}\boldsymbol{r}}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r\\
=&4\pi R^2 f(P)+\int_0^R\left(\oiint\limits_{\boldsymbol{r}\in\partial B(O,R)}\nabla f\left(P+\frac{r}{R}\boldsymbol{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)\mathrm{d}r\\
=&4\pi R^2 f(P)+\int_0^R\left(\iiint\limits_{\boldsymbol{r}\in B(O,R)}\nabla\cdot\nabla f\left(P+\frac{r}{R}\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}r\\
=&4\pi R^2 f(P)+\int_0^R\left(\iiint\limits_{\boldsymbol{r}\in B(O,R)}\Delta f\left(P+\frac{r}{R}\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}r\\
=&4\pi R^2 f(P)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{B(P,R)}f(x,y,z)\mathrm{d}V=&\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta f(P+\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))\\
=&\int_0^R r\left(\oiint\limits_{B(O,r)}f\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r\\
=&\frac{4}{3}\pi R^3 f(P)
\end{aligned}
$$

11.9　调和函数的最值原理

设 D 是平面上光滑封闭曲线 L 所围成的开区域，$f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. 求证若 $f(x,y)$ 不是常数，则它在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都只能在 L 上取到.

证明：$\forall P_0 \in D$，由于 D 是开区域，所以 P_0 为内点。$\forall r > 0$ 使得 $B(P_0, r) \subset D$，我们有：f 在 $B(P_0, r)$ 上的平均值即为 $f(P_0)$，这是因为，由第 11.8 题：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(P_0,r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \mathrm{d}t\int_{\partial B(P_0,t)} f(x,y)\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi t f(P_0)\mathrm{d}t\\
=&f(P_0)
\end{aligned}
$$

由于 f 在 $\overline{D}$ 上有定义,所以 f 在 $\overline{D}$ 可以取到最大值和最小值。不妨设 $f(P_0) = \max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$,因此:$\forall r > 0$ 使得 $B(P_0, r) \subset D, \forall Q \in B(P_0, r)$,有:$f(Q) = f(P_0)$. 这是因为:反设 $\exists Q \in B(P_0, r), f(Q) < f(P_0)$,由连续函数保号性：$\exists B(Q, r') \subset B(P_0, r), \forall Q' \in B(Q, r'), f(Q') < f(P_0)$，又 $\forall P \in B(P_0, r), f(P) \leqslant f(P_0)$，则 $\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_{B(P_0,r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < f(P_0)$，矛盾!

由于 D 是开区域，所以 $\forall Q \in D$，存在连接 P_0, Q 的简单光滑曲线，设其参数表示为 $\boldsymbol{r}(t), t \in [0,1], \boldsymbol{r}(0) = P_0, \boldsymbol{r}(1) = Q$，下考察集合 $I = \{s \in [0,1] \mid \forall t \in [0,s], f(\boldsymbol{r}(t)) = f(P_0)\}$. 易知 $I \neq \varnothing$，这是因为 $\{\boldsymbol{r}(t) | t \in [0,1]\} \cap B(P_0, r) \neq \varnothing$. 因此，我们下证：$I = [0,1]$.

反设 $I = [0, t_0], t_0 \in (0,1)$，于是 $f(\boldsymbol{r}(t_0)) = f(P_0) = \max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$，由上文知，$\exists \delta > 0, B(\boldsymbol{r}(t_0), \delta) \subset D$，使得 $\forall M \in B(\boldsymbol{r}(t_0), \delta), f(M) = f(\boldsymbol{r}(t_0)) = f(P_0)$，所以 $\exists \delta' \in (0, 1-t_0]$，使得 $\forall t \in (t_0, t_0+\delta'], f(\boldsymbol{r}(t)) = f(P_0)$，矛盾! 因此 $I = [0,1]$，从而得知：f 在 D 的内点均取值 $\max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$.

由 Heine 定理，$\forall Q \in \partial D, \exists \{P_n\}^{\infty}: \lim\limits_{n\to\infty} P_n = Q, P_n \in D$，则 $f(Q) = \lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = \max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$. 于是 $\forall P \in \overline{D}, f(P) \equiv \max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$，同理，$\forall P \in \overline{D}, f(P) \equiv \max\limits_{\overline{D}} f(x,y) = \min\limits_{\overline{D}} f(x,y)$，于是 f 为常值函数，矛盾! □

11.10　设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B(P_0,R)}$ 上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$. 求证：$\forall 0 \leqslant r \leqslant R, f(P_0) = \dfrac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$，S 是以 P_0 为球心的球面.

证明：由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
\text{RHS} =&\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} f(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta) r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(f(P_0) + \int_0^r \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi \quad (\boldsymbol{n} = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})\\
=&f(P_0) + \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r \mathrm{d}t\oiint_{\partial B(P_0,t)} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&f(P_0) + \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r \mathrm{d}t\iiint_{B(P_0,t)} \nabla\cdot\nabla f\mathrm{d}V\\
=&f(P_0) + \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r \mathrm{d}t\iiint_{B(P_0,t)} \Delta f\mathrm{d}V\\
=&f(P_0) = \text{LHS}
\end{aligned}
$$

第十二章　Fourier 分析

12.1　函数的 Fourier 级数

定理 12.1: 周期函数的 Fourier 级数

定义在 $[-\pi,\pi]$ 的可积函数 $f(x)$ 在周期延拓意义下，可以展开成

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

由于三角函数系的正交性：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

对于 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

其中：

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\mathrm{d}x,b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\mathrm{d}x$$

函数的 Fourier 级数在 $f(x)$ 分段可导的区间上平方平均收敛，且在 x 处收敛到 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

定理 12.2: Fourier 级数的复数形式

根据 $\mathrm{e}^{ix}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 以及 $[-l.l]$ 上的函数 $f(x)$ 有 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

(记 $\omega=\frac{\pi}{l}$)，且 Fourier 系数为：

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x,b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x$$

得：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中：

$$F_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{Z},\ 且\ F_n=\overline{F_{-n}}$$

1　把它们展开成 Fourier 级数 (说明收敛情况).

(1)　在 $[-\pi,\pi)$ 中，$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$

解：设 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，易知

$$\int x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\cos nx+nx\sin nx}{n^2}+C$$

$$\int x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\sin nx-nx\cos nx}{n^2}+C$$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi},\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=-\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\=&-\int_{-\pi}^{0}\sin nx\mathrm{d}x-\frac{(-1)^n}{n}\\=&\frac{1-2(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

于是，$f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right)$$

在 $[-\pi,0)$ 和 $(0,\pi)$ 中，$f(x)$ 光滑，因此 Fourier 级数一致收敛到 $f(x)$；在 $x=0$ 处，收敛到 $\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=-\frac{\pi}{2}$

(2)　在 $[-\pi,\pi)$ 中，$f(x)=\cos\frac{x}{2}$.

解：设 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nx\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(2n-1\right)x-\cos\left(2n+1\right)x\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{4(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\\=&\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\left(2n+1\right)x-\sin\left(2n-1\right)x\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=0$$

于是，$f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos nx$$

由于 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上光滑且处处连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，则 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi)$ 一致收敛于 $f(x)$.

(3) 在 $[-\pi,\pi)$ 中，$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$

解：设 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，易知：

$$\int\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{n^2+1}(\cos nx+n\sin nx)+C$$

$$\int\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{n^2+1}(\sin nx-n\cos nx)+C$$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi}{\pi\left(n^1+1\right)}\\=&\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n}{\pi\left(n^2+1\right)},\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}+1=\frac{\pi+1-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}$$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\\=&\frac{\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n-n}{\pi\left(n^2+1\right)}+\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\end{aligned}$$

于是，$f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{\pi+1-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n}{n^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^n\left(\mathrm{e}^{-\pi}-n^2-1\right)+1}{n\left(n^2+1\right)}\sin nx\right)$$

由于 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑且处处连续，则 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi)$ 一致收敛于 $f(x)$；在 $x=-\pi$ 处收敛到 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$

2 将下列函数展开成以指定区间长度为周期的 Fourier 级数，并说明收敛情况.

(1) $f(x)=1-\sin\frac{x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$

解：

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\cos 2nx\mathrm{d}x\\=&-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(4nx)\mathrm{d}x\\=&-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\left(4n+1\right)x-\sin(4n-1)x\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{4}{(16n^2-1)\,\pi},\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2\pi-4}{\pi}$$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\sin 2nx\mathrm{d}x\\=&-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin(4nx)\mathrm{d}x\\=&-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(4n-1)x-\cos(4n+1)x\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{16n}{(16n^2-1)\,\pi}\end{aligned}$$

于是，$f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{\pi-2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16n^2-1}\cos 2nx+\frac{4n}{16n^2-1}\sin 2nx\right)$$

由于 f 在 $[0,\pi]$ 光滑，且 $f(0)=f(\pi)$，所以 Fourier 级数在 $[0,\pi]$ 一致收敛到 $f(x)$

(2) $f(x)=\frac{x}{3}\ (0\leqslant x\leqslant T)$

解：

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{2}{T}\int_0^{T}\frac{x}{3}\cos\frac{2n\pi}{T}x\mathrm{d}x\\=&\frac{2T}{3}\left.\frac{\cos\frac{2\pi n}{T}x+\frac{2\pi n}{T}x\sin\frac{2\pi n}{T}x}{4\pi^2n^2}\right|_0^T\\=&0,\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T}\frac{x}{3}\mathrm{d}x=\frac{T}{3}$$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{T}\int_0^{T}\frac{x}{3}\sin\frac{2n\pi}{T}x\mathrm{d}x\\=&\frac{2T}{3}\left.\frac{\sin\frac{2\pi n}{T}x-\frac{2\pi n}{T}x\cos\frac{2\pi n}{T}x}{4\pi^2n^2}\right|_0^T\\=&-\frac{T}{3\pi n}\end{aligned}$$

于是，$f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{T}{6}-\frac{T}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi nx}{T}}{n}$$

因为 f 在 $[0,T]$ 光滑，且 $f(0)=0, f(T)=T$，所以在 $(0,T)$ 上 Fourier 级数一致收敛到 $f(x)$，在 $x=0$ 和 $x=T$ 处 Fourier 级数收敛到 $\frac{f(0)+f(T)}{2}=\frac{T}{6}$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\ (-l\leqslant x\leqslant l)$

解：

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos kx\mathrm{d}x=\frac{k\sin kx+a\cos kx}{a^2+k^2}\mathrm{e}^{ax}+C$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin kx\mathrm{d}x = \frac{a\sin kx - k\cos kx}{a^2-k^2}\mathrm{e}^{ax} + C$$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{ax}\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ =& \left.\frac{n\pi\sin\frac{n\pi}{l}x + al\cos\frac{n\pi}{l}x}{a^2l^2+n^2\pi^2}\mathrm{e}^{ax}\right|_{-l}^{l} \\ =& \frac{al(-1)^n\left(\mathrm{e}^{al}-\mathrm{e}^{-al}\right)}{a^2l^2+n^2\pi^2},\ n\in\mathbb{N}_+ \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{al}-\mathrm{e}^{-al}}{al}, & a\neq 0 \\ 2, & a=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{ax}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ =& \left.\frac{al\sin\frac{n\pi}{l}x - n\pi\cos\frac{n\pi}{l}x}{a^2l^2-n^2\pi^2}\right|_{-l}^{l} \\ =& -\frac{n\pi(-1)^n\left(\mathrm{e}^{al}-\mathrm{e}^{-al}\right)}{a^2l^2-n^2\pi^2} \end{aligned}$$

于是，f 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\begin{cases} \left(\mathrm{e}^{al}-\mathrm{e}^{-al}\right)\left(\frac{1}{2al}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{al\cos\frac{n\pi}{l}x}{a^2l^2+n^2\pi^2}+\frac{n\pi\sin\frac{n\pi}{l}x}{n^2\pi^2-a^2l^2}\right)\right), & a\neq 0 \\ 1, & a=0 \end{cases}$$

(4) $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ -1, & 1\leqslant |x|\leqslant 2 \end{cases}$

解：

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}+\int_{1}^{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x \\ =& \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}_+ \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x = 0$$

由于 f 是偶函数，所以 $b_n=0,\forall n\in\mathbb{N}_+$ 于是，f 在 $[-2,2]$ 上的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

因为 f 在 $[-2,2]$ 上分段光滑，$f(-2)=f(2)$，所以在 $(-1,1),[-2,-1),(1,2]$ 上，Fourier 级数一致收敛到 $f(x)$；在 $x=-1$ 处收敛到 $\frac{f(-1-0)+f(-1+0)}{2}=0$，在 $x=1$ 处收敛到 $\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=0$

3 把下列函数展开成正弦级数和余弦级数

(1)　$f(x)=2x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$

解：易见，我们有：

$$\int x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}x^2\sin nx+\frac{2}{n^2}x\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx+C$$

$$\int x^2\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx+C$$

先求正弦级数，把 f 奇延拓到 $[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\sin nx\mathrm{d}x\\=&\frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^\pi\\=&\frac{4\left(2(-1)^n-2-n^2\pi^2(-1)^n\right)}{\pi n^3}\end{aligned}$$

于是，f 的正弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{2(-1)^n-2-n^2\pi^2(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

再求余弦级数，把 f 偶延拓到 $[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2\sin nx+\frac{2}{n^2}x\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^\pi\\=&\frac{8(-1)^n}{n^2},\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2$$

于是，f 的余弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

(2)　$f(x)=\begin{cases}A, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$

解：先求正弦函数，把 f 奇延拓到 $[-l,l]$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\\=&\frac{2A}{l}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\\=&\frac{2A}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2l}\right)\end{aligned}$$

于是，f 的正弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2l}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

再求余弦级数，把 f 偶延拓到 $[-l.l]$

$$a_n=\frac{2A}{l}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2A}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2l},\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=\frac{2A}{l}\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{A}{l}$$

于是，f 的余弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{A}{2l}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

(3) $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2h}, & 0\leqslant x\leqslant 2h\\ 0, & 2h<x\leqslant\pi\end{cases}$

解：先求正弦函数，把 f 奇延拓到 $[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\sin nx\mathrm{d}x\\=&\frac{2nh-\sin 2nh}{\pi hn^2}\end{aligned}$$

因此，f 的正弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nh-\sin 2nh}{n^2}\sin nx$$

再求余弦级数，把 f 偶延拓到 $[-l.l]$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{1-\cos 2nh}{\pi hn^2},\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\mathrm{d}x=\frac{2h}{\pi}$$

于是，f 的余弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{h}{\pi}+\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nh}{n^2}\cos nx$$

4　已知函数的 Fourier 级数展开式，求常数 a 的值。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=a(2a-|x|)$，其中 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

解：

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a(2a-|x|)\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}(2a-x)\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{2a(1-(-1)^n)}{\pi n^2},\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a(2a-|x|)\mathrm{d}x=a(4a-\pi)$$

比较系数得：$\begin{cases}a(4a-\pi)=0\\ \frac{4a}{\pi}=1\end{cases}$，解得：$a=\frac{\pi}{4}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx = ax$，其中 $-\pi<x<\pi$.

解：

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x\\=&\frac{2a}{\pi}\left.\frac{\sin nx-nx\cos nx}{n^2}\right|_0^{\pi}\\=&\frac{2a(-1)^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

与级数比较系数得：$a=\dfrac{1}{2}$

5

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,\quad -\infty<x<+\infty$$

其中 $a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$. 求 $S\left(\frac{9}{4}\right),S\left(-\frac{5}{2}\right)$.

解：由于 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的余弦级数，所以：

$$S\left(\frac{9}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}=\frac{3}{4}$$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0\\1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的 Fourier 级数的合函数为 $S(x),-\infty<x<+\infty$. 求 $S(3\pi),S(-4\pi)$.

解：易知，$f(x)$ 在 $(-\pi,0),(0,\pi)$ 分别可导，于是由 Dirichlet 收敛定理知，$S(x)$ 在 $(-\pi,0),(0,\pi)$ 分别收敛于 $f(x)$；$S(0)=0,S(\pi)=\frac{\pi^2}{2}$，且 $S(x)$ 周期为 2π. 因此，$S(3\pi)=S(\pi)=\frac{\pi^2}{2},S(-4\pi)=S(0)=0$.

6 设 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的函数

(1) 如果 $f(x\pm\pi)=-f(x)$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开只含有奇次谐波，即

$$a_{2n}=0\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$$

解：

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x-\pi)\cos n(x-\pi)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x)-(-1)^n f(x)\right)\cos nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-\pi)\sin n(x-\pi)\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x)-(-1)^n f(x)\right) sinnx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_+
\end{aligned}$$

因此当 n 为偶数时，$a_n = b_n = 0$，只含有奇次谐波. □

(2)　如果 $f(x\pm\pi) = f(x)$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开只含有偶次谐波，即

$$a_{2n-1} = 0\ (n=1,2,\cdots),\ b_{2n-1} = 0\ (n=1,2,\cdots)$$

解：

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-\pi)\cos n(x-\pi)\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x)+(-1)^n f(x)\right)\cos nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-\pi)\sin n(x-\pi)\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x)+(-1)^n f(x)\right) sinnx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_+
\end{aligned}$$

因此当 n 为奇数时，$a_n = b_n = 0$，只含有偶次谐波. □

7　已知周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数是 a_n, b_n，试证明"平移"了的函数 $f(x+h)\,(h=$ 常数$)$ 的 Fourier 系数为：

$$\bar{a_n} = a_n\cos nh + b_n\sin nh\ (n=0,1,2,\cdots),\ \bar{b_n} = b_n\cos nh - a_n\sin nh\ (n=1,2,\cdots)$$

解：设 $f(x)$ 定义在 $[a, a+2\pi]$ 上，于是：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

于是：$f(x+h)$ 的 Fourier 系数：

$$\begin{aligned}
\bar{a_n} =& \frac{1}{\pi}\int_{a-h}^{a+2\pi-h} f(x+h)\cos\frac{n}{x}\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos n(x-h)\mathrm{d}x \\
=& a_n\cos nh + b_n\sin nh
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b_n} =& \frac{1}{\pi}\int_{a-h}^{a+2\pi-h} f(x+h)\sin\frac{n}{x}\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-h)\mathrm{d}x \\
=& b_n\cos nh - a_n\sin nh
\end{aligned}$$

8　将 $y=1-x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数，并利用其结果求下列级数的和：

解：

$$\int x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}x^2\sin nx+\frac{2}{n^2}x\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx+C$$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-x^2\right)\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2},\ n\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

$$a_0=2-\frac{2}{3}\pi^2$$

$$b_n=0$$

于是，f 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim S(x)=\frac{3-\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$$

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

解：因为 $f(x)$ 是偶函数，$f(1)=f(-1)$，所以在 $\mathbb{R}$ 上，$S(x)=f(x)$，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

解：由 Parseval 等式：

$$2-\frac{4}{3}\pi^2+\frac{2}{5}\pi^4=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2\left(3-\pi^2\right)^2}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=2-\frac{4}{3}\pi^2+\frac{2}{9}\pi^4+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\iff\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

9　将 $f(x)=1+x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成周期为 2π 的余弦级数，并求

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}$

解：对 f 作偶延拓，延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上，再做周期延拓

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n-2}{\pi n^2}\quad n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\,\mathrm{d}x=\pi+2$$

于是，f 的余弦级数为：

$$f(x)\sim S(x)=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

由于 f 在 $[0,\pi]$ 可导，且是偶延拓，所以当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时，收敛到 $f(x)$，则 $f(x)=S(x)$. 于是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2+2\pi}{8}-\frac{\pi}{4}S(1)=\frac{\pi^2+2\pi}{8}-\frac{\pi}{4}f(1)=\frac{\pi^2-2\pi}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2+2\pi}{8}-\frac{\pi}{4}S(4)=\frac{\pi^2+2\pi}{8}-\frac{\pi}{4}f(2\pi-4)=\frac{-3\pi^2+8\pi}{8}$$

10　设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 这个周期上可以表示为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\frac{T}{2}\leqslant x<\frac{\tau}{2}\\ H, & -\frac{\tau}{2}\leqslant x<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \frac{\tau}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}\end{cases}$$

试把它展开成 Fourier 级数的复数形式。

解：易知 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}H\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4H\sin\frac{n\pi}{2}}{Tn},\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}H\mathrm{d}x=\frac{2\pi H}{T}$$

$$f(x)=\frac{H\pi}{T}+\frac{4H}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x=\frac{H\pi}{T}+\frac{2H}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{T}x}+\frac{2H}{T}\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

12.2　平方平均收敛

定义 12.1: $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上可积且平方可积的函数的全体。设 $f(x),g(x)\in\boldsymbol{L}^2[a,b]$，已验证 $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 是线性空间，定义：

内积：$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

模长：$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$

距离：$\|f-g\|=\sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}=\sqrt{\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)^2\mathrm{d}x}$

在上述条件下，易知 $\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$ 上的三角函数系 $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\middle|m\in\mathbb{N}_+\right\}$ 是标准正交系 (不同元素内积为 0，模长均为 1)

定理 12.3: 平方平均收敛

对 $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 中的函数 $f(x)$，若存在 $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 中的函数列 $\{f_n(x)\}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|^2=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)^2\mathrm{d}x=0$，则 $\{f_n(x)\}^{\infty}$ 平方平均收敛于 $f(x)$.

注 12.1: 平方平均收敛是比逐点收敛更弱的收敛，因为是使用积分来定义的，所以在零测集上可以不收敛到目标函数。

例子 12.1: 研究 Fourier 级数的收敛性

因为 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$ 可以展开成 Fourier 级数等价于 $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\middle|m\in\mathbb{N}_+\right\}$ 是 $\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$ 的一组正交基，此时设 $f(x)$ Fourier 级数的部分和为
$S_n(x)\in S_n=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\middle|m=1,2,\cdots,n\right\rangle$ (S 的有限维子空间)。则 Fourier 级数平方平均收敛等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(x)-f(x)\|=0$，则 $S_n(x)$ 应是 $f(x)$ 在上述有限维子空间的投影。根据投影的性质，只需证明：$\|S_n(x)-f(x)\|=\min\limits_{g_n(x)\in S_n}\|g_n(x)-f(x)\|$. 设 $g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$，于是：

$$\Delta_n=\|g_n(x)-f(x)\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(g_n(x)-f(x)\right)^2\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^2(x)+g_n^2(x)-2f(x)g(x)\right)\mathrm{d}x\quad\text{(根据三角函数系的正交性)}\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2\cos^2kx+\beta_k^2\sin^2kx\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\quad-2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0a_0}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_ka_k\cos^2kx+\beta_kb_k\sin^2kx\right)\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)-2\pi\left(\frac{\alpha_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_ka_k+\beta_kb_k\right)\right)\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)+\pi\left(\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\left((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right)\right)\\
&\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\\
&=\|S_n(x)-f(x)\|^2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

当且仅当 $g_n(x)=S_n(x)$ 时取等，因此我们得到：

定理 12.4: Bessel 不等式/Best Approximation

设 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$，则在所有 n 次三角多项式中，有且仅有 $f(x)$ 的 Fourier 系数构成的三角多项式 $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 与 $f(x)$ 距离最小，即与 $f(x)$ 的平方平均偏差 Δ_n 最小，且最小值为：

$$\Delta_n=\|S_n(x)-f(x)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\geqslant 0$$

所以：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

定理 12.5: Parseval 等式

设 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数部分和函数列 $\{S_n(x)\}^\infty$ 平方平均收敛于 $f(x)$：

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2\mathrm{d}x=0$$

上述结论等价于 Bessel 不等式中的等号成立，也即：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

推论 12.1: $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[a,b]$，则 f 的 Fourier 系数 $\{a_n\}^\infty,\{b_n\}^\infty$ 均趋向于零，且平方和收敛。

推论 12.2: 设 $f,g\in\boldsymbol{L}^2[a,b]$，$f,g$ 的 Fourier 系数分别是 $a_n,b_n,\widetilde{a_n},\widetilde{b_n}$，则有：

$$f(x)\equiv 0\iff a_n=0,b_n=0\quad\text{需要 } f \text{ 具有连续性}$$

$$f(x)\equiv g(x)\iff a_n=\widetilde{a_n},b_n=\widetilde{b_n}\quad\text{需要 } f-g \text{ 具有连续性}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\widetilde{a_n}+b_n\widetilde{b_n}\right)\quad\text{(由极化恒等式)}$$

推论 12.3: 设 $f(x)\in \boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$，Fourier 级数为 $f(x)\sim S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $\forall -\pi\leqslant a\leqslant b\leqslant\pi$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

证明：取 $g(x)=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，于是 $g(x)$ 的 Fourier 系数为

$$\widetilde{a_n}=\frac{1}{\pi}\int_a^b\cos nx\mathrm{d}x,\widetilde{b_n}=\frac{1}{\pi}\int_a^b\sin nx\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

定义 12.2: 广义 Fourier 级数

1. 已知 $\forall f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$ 均可以展开成标准正交系 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\middle| m\in\mathbb{N}_+\right\}$ 中向量的线性组合，那么我们试图考虑其他的正交系，例如 Legrendre 多项式：$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$，$n\in\mathbb{N}$，它是 $\boldsymbol{L}^2[-1,1]$ 上的正交系 (习题中提供证明).

2. 设 $\{\varphi_k(x)|k\in\mathbb{N}_+\}$ 是 $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 的标准正交系，那么可以构造对于它的广义 Fourier 系数：

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

   从而构造 f 的广义 Fourier 级数：$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$.

定理 12.6: 广义 Bessel 不等式

设 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[a,b]$，$\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 上有标准正交系 $\{\varphi_n(x)\}^{\infty}$，设 $f(x)$ 的广义 Fourier 系数为 $\{a_n\}^{\infty}$，对任意的“n 次 φ 多项式”$T_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$，均有：$\|f(x)-T_n(x)\|\geqslant\|f(x)-T_n(x)\|=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\geqslant 0$

证明：由正交性，我们有：

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\int_a^b\left(f(x)-T_n(x)\right)^2\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b T_n^2(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)T_n(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha_k)^2\\&\geqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\\&=\|f(x)-S_n(x)\|^2\end{aligned}$$

当且仅当 $T_n(x)=S_n(x)$ 时取等.

定义 12.3: 正交系的完备性

设 $\forall f(x)\in\boldsymbol{L}^2[a,b]$，$a_n$ 是 f 的广义 Fourier 系数，若广义 Parvesal 等式成立：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\|f(x)\|^2$，则 $\{\varphi_n(x)\}^{\infty}$ 是完备的标准正交系。(由 $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 中的“距离”定义和广义 Bessel 不等式可证)

定理 12.7: 设 $\{\varphi_n(x)\}^{\infty}$ 是 $\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 中完备的标准正交系，那么 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[a,b]$ 的广义 Fourier 级数部分和 $\{S_n(x)\}^{\infty}$ 平方平均收敛于 $f(x)$.

1　将 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & a\leqslant |x|<\pi\end{cases}$ 展开成 Fourier 级数，然后利用 Parseval 等式求下列级数的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$；(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}$.

解：求余弦级数，将 $f(x)$ 进行偶延拓：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{2\sin na}{n\pi}, & n\in\mathbb{N}_+\\ \frac{2a}{\pi}, & n=0\end{cases}$$

于是，$f(x)$ 的余弦级数为：

$$f(x)\sim\frac{a}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n}\cos nx$$

由 Parvesal 等式：

$$\frac{2a^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2a}{\pi}$$

因此：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{\pi a}{2}-\frac{a^2}{2}$$

因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi a}{2}+\frac{a^2}{2}$$

2　设 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$，$a_n,b_n$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛.

证明：由 Parseval 等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{k}\right)^2$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛，同理，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 绝对收敛。 □

3　求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解：

$$a_n=0,\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=2k-1\end{cases}\quad k\in\mathbb{N}_+$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

由 Parvesal 等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{16} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$$

对 $f(x)$ 求变上限积分 ($x \in [0,\pi]$)：

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8}$$

5 将 $f(x) = a\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ 按照第 4 题中 (2) 函数系展开成广义 Fourier 级数.

解：

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l a\left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2a}{n\pi}$$

$$\implies f(x) \sim \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi x}{l}}{n}$$

6 将 $f(x) = x$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ 按第 4 题 (4) 的函数系展开成广义 Fourier 级数.

解：

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x = \frac{4l}{\pi} \frac{(2n-1)\pi(-1)^{n-1} - 2}{(2n-1)^2}$$

$$\implies f(x) \sim \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi(-1)^{n-1} - 2}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

7 证明 Legrendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

在区间 $[-1,1]$ 上构成一个正交系.

证明：$\forall n, m \in \mathbb{N}$，因为：$\left.\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=\pm 1} = 0, \forall 0 \leqslant k \leqslant n-1$，注意到：$\deg\left(P_n(x)\right) = n$，不妨设 $m \geqslant n$：

$$\begin{aligned}
&\langle P_n(x), P_m(x)\rangle \\
=&\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2^{m+n}m!n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(x^2-1\right)^m \mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2^{m+n}m!n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(x^2-1\right)^m\right) \\
=&\frac{1}{2^{m+n}m!n!} \left.\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(x^2-1\right)^m\right)\right|_{-1}^{1} \\
&-\frac{1}{2^{m+n}m!n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(x^2-1\right)^m \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{(-1)^k}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+k}}{\mathrm{d}x^{n+k}}\left(x^2-1\right)^n\frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}\left(x^2-1\right)^m\mathrm{d}x\quad(0\leqslant k\leqslant m)\\
=&\frac{(-1)^m}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x\\
=&\begin{cases}0, & m>n\\ \frac{(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x, & m=n\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|P_n(x)\|^2=&\frac{(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x\\
=&\frac{2(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{0}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x\\
=&\frac{2(-1)^{n+1}\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{0}^{1}\frac{2n}{3}\left(x^2-1\right)^{n-1}\mathrm{d}x^3\\
=&\frac{2(-1)^{n+2}\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{0}^{1}\frac{2^2n(n-1)}{3\times 5}\left(x^2-1\right)^{n-2}\mathrm{d}x^5\\
=&\frac{2(-1)^{n+k}\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{0}^{1}\frac{2^kn!}{(n-k)!(2k+1)!!}\left(x^2-1\right)^{n-k}\mathrm{d}x^{2k+1}\\
=&\frac{2\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\int_{0}^{1}\frac{2^nn!}{(2n+1)!!}\mathrm{d}x^{2n+1}\\
=&\frac{(2n-1)!!(2n)!!}{n!2^{n-1}(2n+1)!!}\\
=&\frac{2}{2n+1}
\end{aligned}
$$

于是，我们可以指出其对应的标准正交系：

$$
\left\{\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n\middle|n\in\mathbb{N}\right\}
$$

12.3 收敛性定理的证明

定理 12.8: Dirichlet 收敛定理

设 $S_n(x)$ 是 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数的前 $2n+1$ 项和，将 f 做 $T=2\pi$ 的周期延拓，则：

1. 若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 分段可微，则 $\{S_n(x)\}^\infty$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$
2. 若在上一种情况下增加 f 周期延拓后在 $\mathbb{R}$ 连续的条件，则 $\{S_n(x)\}^\infty$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛到 $f(x)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

注 12.2: 分段可微是指，在 $[-\pi,\pi]$ 上有限个子开区间上可微，且在每一个该种子开区间的左右端点的极限存在。在每个这样的子开区间的闭包中，左右端点处的单侧导数定义为：按照函数在该端点的取值等于在此开区间闭包上的该端点处对应单侧极限，所计算得的对应单侧导数。

证明：(1) 以 $T=2\pi$，将 $f(x)$ 做周期延拓。由 Fourier 系数的定义，设 $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，我们有：

$$
\begin{aligned}
S_n(x)=&\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\right)f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k(x-t)\right)\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

其中：

$$
D_n(t)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}t}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}
$$

称 Dirichlet Kernel，是在 $x=0$ 处有极限的偶函数，并且满足：

$$
\int_{0}^{\pi}D_n(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\ \int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\mathrm{d}t=\pi
$$

由此：

$$
S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\right)f(x+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\mathrm{d}t
$$

由 Dirichlet Kernel 的性质，设 $\phi(t,x)=f(x+t)+f(x-t)-2S(x)=f(x+t)-f(x+0)+f(x-t)-f(x-0)$.

$$
S_n(x)-S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\phi(t,x)\mathrm{d}t
$$

$\forall g(x)\in\boldsymbol{L}^2[0,\pi]$，设 $\psi(x)=\begin{cases}g(x), & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\in[-\pi,0)\end{cases}$，由 Bessel 不等式知平方可积函数的 Fourier 系数趋于零，所以：

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\left(\sin nt\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\cos nt\right)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\psi(t)\cos\frac{t}{2}\right)\sin nt+\left(\psi(t)\sin\frac{t}{2}\right)\cos nt\right)\mathrm{d}t=0+0=0
\end{aligned}
$$

因为：$\dfrac{\phi(t,x)}{\sin\frac{t}{2}}=\left(\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\dfrac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right)\dfrac{t}{\sin\frac{t}{2}}$，所以当 $t>0$ 时，函数 $\dfrac{\phi(t,x)}{\sin\frac{t}{2}}$ 是分段可微的，且 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\phi(t,x)}{\sin\frac{t}{2}}=2f'(x+0)-2f'(x-0)$. 因此 $t=0$ 不是瑕点，$\dfrac{\phi(t,x)}{\sin\frac{t}{2}}$ 是平方可积的。因此令 $g(x)=\dfrac{\phi(x,t)}{\sin\frac{t}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n(x)-S(x)\right)=0$，即 $\{S_n(x)\}^{\infty}$ 逐点收敛到 $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$。 □

证明：(2) 当 $f(x)$ 周期延拓后连续时，$f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，$f(-\pi)=f(\pi)$，于是：

$$
a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{b_n'}{n}
$$

$$
b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{f(x)\cos nx}{n\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a_n'}{n}
$$

其中 a_n',b_n' 是 $f'(x)$ 的 Fourier 系数，由 $f(-\pi)=f(\pi)$ 知 $a_0'=0$，由 Bessel 不等式，$\sum\limits_{n=1}\left({a_n'}^2+{b_n'}^2\right)$ 收敛，由 $2|a_n|=2\left|\dfrac{b_n'}{n}\right|\leqslant {b_n'}^2+\dfrac{1}{n^2},2|b_n|=2\left|\dfrac{a_n'}{n}\right|\leqslant {a_n'}^2+\dfrac{1}{n^2}$ 知：$\forall x\in\mathbb{R},|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant |a_n|+|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2}\left({a_n'}^2+{b_n'}^2\right)+\dfrac{1}{n^2}$，由 Weierstrass 判别法，$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛。 □

定理 12.9: 平方平均收敛性定理

设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 的 Riemann 可积的函数，那么其 Fourier 级数平方平均收敛到 $f(x)$.

证明：因为 $f(x)$ Riemann 可积，所以不妨设 $f(-\pi)=f(\pi)$，不妨设 f 非常数. 设 $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)-\inf\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)=\Omega$. 取区间 $[-\pi,\pi]$ 的任意一个分割 $T:-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi$，那么：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\|T\|<\delta:\sum_{k=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4\Omega}$$

其中 $\omega_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)-\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. 考虑分段函数：

$$g_T(x)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_i)+f(x_i),x\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$$

易知：$g_T(x)$ 是分段光滑的连续函数，且 $\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-g(x)|\leqslant\omega_i,i=1,2,\cdots,n$，于是：

$$\|f(x)-g_T(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-g_T(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\Delta x_i\leqslant\Omega\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4}$$

由 Dirichlet 收敛性定理，$g_T(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 绝对一致收敛于 $g_T(x)$. 因此，对于上述 $\varepsilon>0$，存在 Trigonometric Polynomial $S_{T,m}(x)$ 使得 $\forall x\in[-\pi,\pi],|g_T(x)-S_{T,m}(x)|<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$. 因此 $\|g_T(x)-S_{T,m}(x)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(g_T(x)-S_{T,m}(x))^2\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}$. 于是，由 $(a+b)^2\leqslant2\left(a^2+b^2\right)$ 知：

$$\begin{aligned}\|f(x)-S_{T,m}(x)\|^2=&\|f(x)-g_T(x)+g_T(x)-S_{T,m}(x)\|^2\\\leqslant&2\left(\|f(x)-g_T(x)\|^2+\|g_T(x)-S_{T,m}(x)\|^2\right)<2\left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

由 Bessel 不等式/Best Approximation，$f(x)$ 的 Fourier 级数部分和 $S_m(x)$ 满足：$\|f(x)-S_m(x)\|^2\leqslant\|f(x)-S_{T,m}(x)\|^2=\varepsilon$，也即 $f(x)$ 的 Fourier 级数平方平均收敛于 $f(x)$. □

注 12.3: 上述证明中使用的方法是：用一个分段光滑的连续函数 $g(x)$ 逼近 $f(x)$，然后用 $g(x)$ 的 Fourier 级数逼近 $f(x)$. 因为考虑“逼近”，所以需要做分割。

例子 12.2: 设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的简单连续分段光滑封闭曲线，长度为 $L>0$，求证：Γ 围成的区域 $\mathcal{A}$ 的面积最大为 $\sigma(\mathcal{A})=\frac{L^2}{4\pi}$，当且仅当 Γ 是圆周时取等。

证明：定向 Γ 的正向为逆时针，也即内部始终在切向的逆时针侧，设 Γ 的正向自然参数表示 $\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}$, $s\in[0,L]$. 进行代换：

$$\begin{cases}u=\frac{2\pi}{L}x\\v=\frac{2\pi}{L}y\end{cases},\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{L^2}{4\pi^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\frac{L}{2\pi}\sqrt{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}=\frac{L}{2\pi}\mathrm{d}\ell$$

也即 (u,v) 在 $\mathbb{R}^2$ 上对应简单分段光滑封闭曲线 Γ'，长度 2π. 因此，等价于证明：当 Γ 长度 2π 时，$\sigma(\mathcal{A})\leqslant\pi$，当且仅当 Γ 是单位圆周时取等。

将 $\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j},s\in[0,2\pi]$ 进行 $T=2\pi$ 的周期延拓。因为连续且分段光滑，所以设 Fourier 级数为 $\boldsymbol{r}(s)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{ins}\boldsymbol{i}+\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}b_n\mathrm{e}^{ins}\boldsymbol{j}$. 由 Green 公式：

$$\sigma(\mathcal{A})=\left|\int_\Gamma x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}x(s)y'(s)\mathrm{d}s\right|=\left|\int_0^{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m\mathrm{e}^{ims}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}nb_n\mathrm{e}^{ins}\mathrm{d}s\right|$$

因为 $x(s),y(s)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续，所以 Fourier 级数绝对一致收敛；因为 $x(s),y(s)\in\mathbb{R}$，所以 $a_n=\overline{a_{-n}},b_n=\overline{b_{-n}}$. 因为 $\left\langle \mathrm{e}^{ims},\mathrm{e}^{ins}\right\rangle=2\pi\delta_{m,-n}$，所以：

$$\left|\int_0^{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}ms}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}nb_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}ns}\mathrm{d}s\right|=2\pi\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}na_n\overline{b_n}\right|=2\pi\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}na_n\overline{b_n}\right|$$

因为 $x'^2(s)+y'^2(s)=1$，所以 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=1$. 因为 $|n|\leqslant n^2$，结合 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\sigma(\mathcal{A})=2\pi\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}na_n\overline{b_n}\right|\leqslant\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\leqslant\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=\pi$$

当且仅当 $\begin{cases}x(s)=\overline{a_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}+a_0+a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\\ y(s)=\overline{b_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}+b_0+b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\\ |a_1|^2+|b_1|^2=1\\ |a_1|=|b_1|\end{cases}$ 时取等，也即 $|a_1|=|a_2|=\dfrac{1}{2}$. 设 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\\ b_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\end{cases}$ ，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，由 $\begin{cases}x'^2(s)+y'^2(s)=1\\ x'(s)=\cos(s+\alpha)\\ y'(s)=\cos(s+\beta)\end{cases}$ 知：$|\alpha-\beta|=\dfrac{2k+1}{2}\pi,k\in\mathbb{Z}$，也即 Γ 为单位圆周。 □

例子 12.3: 无理数的 $1,2,3,\cdots$ 倍的小数部分在 $[0,1)$ 稠密且均匀分布。

引理 12.1: 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的连续函数，则 $\forall\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k\gamma)=\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x.$

证明：设 f 以 1 为周期的 Fourier 级数为 $f(x)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}a_m\mathrm{e}^{2\pi mx\mathrm{i}}$，由 Dirichlet 收敛定理，其绝对一致收敛。因为 $\gamma\notin\mathbb{Q}$，所以 $m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 时 $1-\mathrm{e}^{2\pi m\gamma\mathrm{i}}\neq0$，于是：

$$\forall m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{2\pi mk\gamma\mathrm{i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi m\gamma\mathrm{i}}}{n}\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi mn\gamma\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{2\pi m\gamma\mathrm{i}}}=0$$

由 f 的 Fourier 级数的绝对一致收敛性：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k\gamma)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{2\pi mk\gamma\mathrm{i}}=a_0=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$$

引理证毕，回到原题。

证明：设 $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，等价于证明：

$$\forall 0\leqslant a<b\leqslant1,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{(a,b)}(k\gamma)=b-a,\ \text{其中}\ \delta_{(a,b)}(x)=\begin{cases}1, & x\in(a,b)\\ 0, & x\in[0,1)\setminus(a,b)\\ \delta_{(a,b)}(x-[x]), & x\notin[0,1)\end{cases}$$

取定 $0<a<b<1$，$\forall 0<\varepsilon<\min\left\{\frac{b-a}{2},a,1-b\right\}$，考虑 $[0,1)$ 上的函数

$$f_\varepsilon^+(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{\varepsilon}+1, & x\in(a-\varepsilon,a)\\ 1, & x\in[a,b]\\ \frac{b-x}{\varepsilon}+1, & x\in(b,b+\varepsilon)\\ 0, & \text{else}\end{cases},f_\varepsilon^-(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{\varepsilon}, & x\in(a,a+\varepsilon)\\ 1, & x\in[a,b]\\ \frac{b-x}{\varepsilon}, & x\in(b-\varepsilon,b)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

的以 1 为周期的周期延拓。由引理，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_\varepsilon^+(k\gamma)=b-a+\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_\varepsilon^-(k\gamma)=b-a-\varepsilon$. 又因为 $f_\varepsilon^-(x)\leqslant\delta_{(a,b)}(x)\leqslant f_\varepsilon^+(x)$，所以 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_\varepsilon^-(k\gamma)\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{(a,b)}(k\gamma)\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_\varepsilon^+(k\gamma)$. 令 $n\to\infty$，由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{(a,b)}(k\gamma)=b-a$. □

1 把函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x\ (-\pi<x<\pi)$ 展开为 Fourier 级数，并证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

解：由于 f 是奇函数，所以：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}$$

因此，f 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

由于 f 在 $(0,\pi)$ 连续，所以 $x\in(0,\pi)$ 时，$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ □

令 $x=\frac{\pi}{2}$，得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

2 在区间 $(-\pi,\pi)$ 将下列函数展开为 Fourier 级数：(1) $|x|$；(2) $\sin ax\ (a\notin\mathbb{Z})$；(3) $x\sin x$.

解：注意到：$|x|$ 是偶函数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2},\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$$

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

解：注意到：$\sin ax$ 是奇函数

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2n(-1)^n\sin(a\pi)}{\pi\left(a^2-n^2\right)}$$

$$\sin ax\sim\frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n\sin nx}{a^2-n^2}$$

解：注意到：$x\sin x$ 是偶函数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1},\ n\geqslant 2$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2$$

$$x\sin x=1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2-1}$$

3　把 $f(x)=x-[x]$ ($[x]$ 是不超过 x 的最大整数) 在 $[0,1]$ 上展开为 Fourier 级数.

解：

$$a_n=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=0,\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1$$

$$b_n=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}$$

于是，f 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

4　利用 $\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 展开式，证明：

(1) $\cot x=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(2) $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

解：注意到：$\cos ax$ 是偶函数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2a(-1)^n\sin(a\pi)}{\pi\left(a^2-n^2\right)}, & a\notin\mathbb{Z}\\ \delta_{na}, & a\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$a_0=\begin{cases}\dfrac{2\sin(a\pi)}{a\pi}, & a\neq 0\\ 2, & a=0\end{cases}$$

$$\cos ax=\begin{cases}\dfrac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\dfrac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}, & a\notin\mathbb{Z}\\ \cos ax, & a\in\mathbb{Z}_+\end{cases}$$

证明：(1) 当 $a\neq k,\ k\in\mathbb{Z}$ 时：

$$\cos a\pi=\frac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}$$

$$\iff\ \cot a\pi=\frac{1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{a^2-n^2}=\frac{1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2}$$

$\forall x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$，令 $a=\frac{x}{\pi}$：

$$\cot x=\frac{1}{x}+\frac{2x}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{x^2-\pi^2n^2}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

证明：(2) 当 $a\neq k,\ k\in\mathbb{Z}$ 时：

$$\cos ax=\frac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}$$

$$\iff\ \frac{1}{\sin(a\pi)}=\frac{1}{a\pi\cos(ax)}+\frac{2a}{\pi\cos(ax)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{(a^2-n^2)\cos(ax)}$$

$\forall y \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$，令 $a = \dfrac{y}{\pi}$：

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y \cos\left(y \frac{x}{\pi}\right)} + \frac{2y}{\cos\left(y \frac{x}{\pi}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{(y^2 - \pi^2 n^2) \cos\left(y \frac{x}{\pi}\right)}$$

取 $x = 0$：

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n y}{y^2 - \pi^2 n^2}$$

5　证明：$\forall x \in \mathbb{R}$：

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos(2nx)$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx)$$

证明：易知，$|\cos x|, |\sin x|$ 均为偶函数，周期为 π，于是，考虑 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的 Fourier 级数。

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x\right) \mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n-1}}{\pi\left(4n^2 - 1\right)}$$

$$\implies |\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos(2nx)$$

$$\widetilde{b_n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\right) \mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi\left(4n^2 - 1\right)}$$

$$\implies |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx)$$

6　对 $x \in (0, 2\pi)$ 以及 $a \neq 0$，求证：

$$\mathrm{e}^{ax} = \frac{\mathrm{e}^{2a\pi} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos kx - k \sin kx}{k^2 + a^2} \right)$$

证明：注意到：当 $a, k \neq 0$ 时：

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos kx \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}\left(k \sin kx + a \cos kx\right)}{a^2 + k^2} + C$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin kx \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}\left(-k \cos kx + a \sin kx\right)}{a^2 + k^2} + C$$

因此，我们有：

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax} \cos nx \mathrm{d}x = \frac{a\left(\mathrm{e}^{2a\pi} - 1\right)}{\pi\left(a^2 + k^2\right)},\ n \in \mathbb{N}_+$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2a\pi} - 1}{a\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax} \sin nx \mathrm{d}x = \frac{-k\left(\mathrm{e}^{2a\pi} - 1\right)}{\pi\left(a^2 + k^2\right)}$$

$$\implies \forall x \in (0, 2\pi):\ \mathrm{e}^{ax} = \frac{\mathrm{e}^{2a\pi} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos kx - k \sin kx}{k^2 + a^2} \right)$$

7 对展开式 $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}\ (-\pi<x<\pi)$ 逐项积分，求函数 x^2,x^2,x^4 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 展开式，并证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}=\dfrac{\pi^6}{945}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^8}=\dfrac{\pi^8}{9450}$.

解：由 Parseval 等式：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^2}{90}$

$$x^2=2\int_0^x t\mathrm{d}t=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x\frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1-\cos nx)}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

$$x^3=3\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\pi^2x+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(n^2\pi^2-6\right)}{n^3}\sin nx$$

$$x^4=4\int_0^x t^3\mathrm{d}t=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(n^2\pi^2-6\right)}{n^4}(1-\cos nx)=\frac{\pi^4}{5}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^2\pi^2-6\right)\cos nx}{n^4}$$

由 Parseval 等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3-\pi^2x}{12}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^6}{945},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^4-2\pi^2x^2+\frac{7\pi^4}{15}}{48}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^8}{9450}$$

8 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi\end{cases}$，证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}\sin nx\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

证明：将 f 做奇延拓，求正弦级数：

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\sin n}{n^2}$$

$$\Longrightarrow\ f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx$$

又因为 $f(0)=f(\pi)=0$，所以在 $[0,\pi]$ 上，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}\sin nx$ □

9 利用上题结果，证明：(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2=\dfrac{\pi-1}{2}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4}=\dfrac{(\pi-1)^2}{6}$.

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=f(1)=\frac{\pi-1}{2}$$

因为 f 在奇延拓后是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续分段可导的函数，所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=f'(0)=\frac{\pi-1}{2}$$

由 Parseval 等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$

注 12.4: 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，求 $f(x)$ 的收敛情况。

解：因为 f 以 2π 为周期，所以我们只讨论 $[0,2\pi)$ 的情况。易知 $f(0)=f(\pi)=f(2\pi)=0$. 因为：

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{2n+1}{2}x-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

于是，任取 $\delta\in(0,2\pi)$，则有：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},n\in\mathbb{N}_+$，对 x 一致，又因为 $\frac{1}{n}$ 单调递减一致趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛。

$\forall x\in(0,2\pi)$，由 Riemann-Lesbegue 定理：

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_x^{\pi}\cos kt\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\int_x^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\int_x^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\int_x^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\pi-x}{2}\\&=\frac{\pi-x}{2}\end{aligned}$$

于是：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{\pi-x}{2}, & x\neq 0\end{cases}\quad x\in[0,2\pi)$$

12.4　Fourier 变换

定理 12.10: Fourier Transform

考虑 $f(x)\in\boldsymbol{L}^2[-l,l]$ 的 Fourier 级数复数形式：

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中 $\omega=\dfrac{\pi}{l},F_n=\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{Z}$. 将其代入 Fourier 级数，得到：

$$f(x)\sim\frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega(\xi-x)}\mathrm{d}\xi$$

为了使原来的级数求和系数与 l 无关，我们令 $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}=n\omega$, $n\in\mathbb{Z}$, $\Delta\lambda_n=\lambda$，于是有：

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\triangleq\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Delta\lambda_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}H(\lambda_n)$$

其中 $H(\lambda_n)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\lambda_n\xi}\mathrm{d}\xi$. 注意到：上式右边是一个 Riemann 和的形式，因此令 $l\to+\infty$，得到积分：

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\xi-x)}\mathrm{d}x$$

我们可以证明 (证明方法与 Dirichlet 收敛定理的证明类似)：若 f 在 $\mathbb{R}$ 上的任何有限区间分段可微，且在 $\mathbb{R}$ 绝对可积 (这是充分条件)，那么在 $\mathbb{R}$ 上有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

我们称

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

为 f 的 Fourier 变换或 f 的像函数，称

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{2}$$

为 f 的 Fourier 逆变换或象原函数，公式 (2) 称为 f 的 Fourier 反演公式，这种变换方式与 Fourier 级数复数形式相似。

由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，结合 $\cos x,\sin x$ 的奇偶性，我们在实数域进行 Fourier Transform：

$$\begin{aligned}
f(x)\sim&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\xi-x)}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\cos\lambda x\mathrm{d}\xi+\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\sin\lambda x\mathrm{d}\xi\right)\\
\triangleq&\int_{0}^{+\infty}\left(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right)\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

其中 $a(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi$, $b(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi$. 此种变换方式与 Fourier 级数实数形式相似。

定理 12.11: 正弦、余弦变换

(1) 如果 f 是偶函数，那么 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变换为：

$$F_e[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\cos\lambda x-\mathrm{i}\sin\lambda x\right)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x$$

逆变换是：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[f](\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_e[f](\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

(2) 如果 f 是偶函数，那么 $f(x)$ 的 Fourier 变换为：

$$F_o[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\cos\lambda x-\mathrm{i}\sin\lambda x\right)\mathrm{d}t=-2\mathrm{i}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

正弦变换为：

$$G_o[f](\lambda)=\mathrm{i}F_o[f](\lambda)=2\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

逆变换是：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} G_o[f](\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

定理 12.12: Fourier 变换的性质

(1) 线性关系：$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g]$. 易证。

(2) 频移特性：$F\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 x}\right](\lambda)=F[f](\lambda+\lambda_0)$.

证明：

$$F\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 x}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\lambda_0)x}\mathrm{d}x=F[f](\lambda+\lambda_0)\quad\square$$

(3) 微分关系：若 $f(\pm\infty)=0$，而微商的 Fourier 变换存在，则：$F\left[f'\right]=\mathrm{i}\lambda F[f]$；一般地，$F\left[f^{(k)}\right]=(\mathrm{i}\lambda)^k F[f]$.

证明：

$$F\left[f'\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}f(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{i}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\lambda F[f]$$

$$\Longrightarrow F\left[f^{(k)}\right]=(\mathrm{i}\lambda)^k F[f]$$

(4) 微分特性：若 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 的 Fourier 变换存在，则：$F'[f]=-\mathrm{i}F\left[xf(x)\right]$.

证明：

$$F'[f]=\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}-\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=-\mathrm{i}F\left[xf(x)\right]$$

定义 12.4: 卷积

对于 $\mathbb{R}$ 上可积且绝对可积的函数 f,g，定义运算并生成一个 $\mathbb{R}$ 上的新的函数：

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

定理 12.13: 卷积的性质

(1) 交换律：$f*g=g*f$. 易证。

(2) 分配律：$f*(g+h)=f*g+f*h$. 易证。

(3) 结合律：$(f*g)*h=f*(g*h)$.

证明：设 f,g,h 是 $\mathbb{R}$ 上的可积且绝对可积的函数，则有：

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x-t)h(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t-u)g(u)h(t)\mathrm{d}u\\&\xlongequal{u=y-t}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y-t)h(t)\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y-t)h(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-t)h(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(g*h)(y)\mathrm{d}y\\&=f*(g*h)(x)\end{aligned}$$

(4) 卷积的 Fourier 变换是 Fourier 变换的乘积，也即：$F[f*g]=F[f]F[g]$.

证明：因为 f,g 是 $\mathbb{R}$ 上可积且绝对可积的函数，所以：

$$\begin{aligned}F[f*g](\lambda)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x=t+u}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t+u)}\mathrm{d}u\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{d}^{-\mathrm{i}\lambda u}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\\
&=F[f](\lambda)F[g](\lambda)
\end{aligned}
$$

推论 12.4: Fourier 变换的 Parseval 等式

引理 12.2: Riemann-Lesbegue 引理

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 的可积函数，$g(x)$ 是以 T 为周期的，在 $[0,T]$ 可积的函数，则：$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

证明：设 $g^+(x)=\dfrac{g(x)+|g(x)|}{2},g^-(x)=\dfrac{g(x)-|g(x)|}{2}$，易知 $g(x)=g^+(x)+g^-(x)$，且 $g^+(x),g^-(x)$ 以 T 为周期，可积。令 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$，易知 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 可积，有界。

取 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得 $[-NT,NT]\supset[a,b]$. 对 $\lambda>1$，取 $n=[\lambda]$，于是 $n\dfrac{T}{\lambda}\leqslant T<(n+1)\dfrac{T}{\lambda}$. 取 $m\in N_+$，取 $[-NT,NT]$ 的分割 $T_m: x_k=\dfrac{kT}{m\lambda}-NT, k=0,1,\cdots,2mn$，$\|T_m\|=\dfrac{T}{m\lambda},x_{2mn}=\frac{2nT}{\lambda}-NT$. 设 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot\sup\limits_{x\in[0,T]}|g(x)|=M$，因为 $NT-\left(\frac{2nT}{\lambda}-NT\right)=2T\dfrac{\{\lambda\}}{\lambda}<\dfrac{2T}{\lambda}$，由夹逼定理知，$\left|\int_{\frac{2nT}{\lambda}-NT}^{NT}f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\right|<\dfrac{2TM}{\lambda}$，于是我们有：

$$
\begin{aligned}
\int_{-NT}^{NT}F(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{2mn}\int_{x_{k-1}}^{x_k}F(x)g^+(nx)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2mn}\int_{x_{k-1}}^{x_k}F(x)g^-(nx)\mathrm{d}x+\int_{x_{2mn}}^{NT}F(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{2mn}c_i\int_{x_{k-1}}^{x_k}g^+(nx)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2mn}d_i\int_{x_{k-1}}^{x_k}g^-(nx)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2nT}{\lambda}-NT}^{NT}F(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\\
&\quad\left(\exists\, c_k,d_k\in\left[\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}F(x),\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}F(x)\right]\right)\\
&\to\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_{-NT}^{\frac{2nT}{\lambda}-NT}F(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2nT}{\lambda}-NT}^{NT}F(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\quad(m\to\infty)\\
&\to\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_{-NT}^{NT}f(x)\mathrm{d}x\quad(\lambda\to+\infty)
\end{aligned}
$$

即 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ □

1 用 Fourier 积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ kx, & 0<x<T\\ 0, & x\geqslant T\end{cases}$

解：

$$F(\lambda)=\int_0^T kx\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{k\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda T}(\mathrm{i}\lambda T+1)-1\right)}{\lambda^2}, & \lambda\neq 0\\ \frac{kT^2}{2}, & \lambda=0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda T}\left(\mathrm{i}\lambda T+1\right)-1}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

(2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

解：

$$G(\lambda)=2\int_0^1\sin\lambda x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2-2\cos\lambda}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ 0, & \lambda=0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}\ (a>0)$

解：由 Laplace 积分：

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}$$

$$f(x)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

2 求下列函数的 Fourier 变换

(1) $f(x)=x\mathrm{e}^{-a|x|}\ (a>0)$

解：

$$\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C,\ \int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C$$

$$\begin{aligned}&\int x\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x\\=&\int x\mathrm{d}\left(\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\right)=x\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}-\int\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x\\=&x\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}-\frac{a}{a^2+b^2}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+\frac{b}{a^2+b^2}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C\\=&\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}x\mathrm{e}^{ax}+\frac{\left(b^2-a^2\right)\sin bx+2ab\cos bx}{\left(a^2+b^2\right)^2}\mathrm{e}^{ax}+C\end{aligned}$$

易知 f 是奇函数，所以：

$$F(\lambda)=-2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax}\sin\lambda x\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\frac{-2\lambda}{\left(a^2+\lambda^2\right)^2}=\frac{-4\mathrm{i}\lambda}{\left(a^2+\lambda^2\right)^2}$$

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}\cos bx\ (a>0)$

解：由 $a>0$ 知 $-\mathrm{i}\lambda\pm a\neq 0$

$$\int\mathrm{e}^{kx}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{b\sin bx+k\cos bx}{k^2+b^2}\mathrm{e}^{kx}+C$$

$$
\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x + a|x|}\cos bx\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\lambda)x}\cos bx\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\lambda)x}\cos bx\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{b\sin bx - (a+\mathrm{i}\lambda)\cos bx}{b^2+(a+\mathrm{i}\lambda)^2}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\lambda)x}\right|_0^{+\infty} + \left.\frac{b\sin bx + (a-\mathrm{i}\lambda)\cos bx}{b^2+(a-\mathrm{i}\lambda)^2}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\lambda)x}\right|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{a-\mathrm{i}\lambda}{b^2+(a-\mathrm{i}\lambda)^2} + \frac{a+\mathrm{i}\lambda}{b^2+(a+\mathrm{i}\lambda)^2} \\
&= \frac{2a\left(a^2+b^2+\lambda^2\right)}{\left(a^2+b^2-\lambda^2\right)^2+4a^2\lambda^2}
\end{aligned}
$$

(3)　$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

解：

$$
F(\lambda) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2\cos\frac{\pi\lambda}{2}}{1-\lambda^2}, & \lambda \neq \pm 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \lambda = \pm 1 \end{cases}
$$

3　按指定的要求将函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ 表示成 Fourier 积分.

(1)　用偶性开拓

解：

$$
F(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos\lambda x\mathrm{d}x = 2\left.\frac{\lambda\sin\lambda x - \cos\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{e}^{-x}\right|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2+1}
$$

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\mathrm{d}\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\mathrm{d}\lambda
$$

(2)　用奇性开拓

解：

$$
G(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin\lambda x\mathrm{d}x = 2\left.\frac{-\sin\lambda x - \lambda\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{e}^{-x}\right|_0^{+\infty} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}
$$

$$
f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+1}\mathrm{d}\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+1}\mathrm{d}\lambda
$$

4　求函数

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}
$$

的 Fourier 变换，由此证明

$$
\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}
$$

解：易知 f 是偶函数，所以：

$$G(\lambda)=2\int_0^1\cos\lambda x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2\sin\lambda}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ 2, & \lambda=0\end{cases}$$

则 Fourier 变换：

$$F(\lambda)=-\mathrm{i}G(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{-2\mathrm{i}\sin\lambda}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ -2\mathrm{i}, & \lambda=0\end{cases}$$

证明：

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}G(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

因为 $G(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处连续，$\left.\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|_{\pm 1}=\dfrac{1}{2}$，所以：

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}=\frac{\pi}{2}\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |x|<1\\ \frac{\pi}{4}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

5 求函数 $F(\lambda)=\lambda\mathrm{e}^{-\beta|\lambda|}$ $(\beta>0)$ 的 Fourier 逆变换.

解：

$$\int x\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}x\mathrm{e}^{ax}+\frac{\left(b^2-a^2\right)\sin bx+2ab\cos bx}{\left(a^2+b^2\right)^2}\mathrm{e}^{ax}+C$$

易知，$F(\lambda)$ 是奇函数，所以：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\beta|\lambda|}\mathrm{i}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{2\beta x\mathrm{i}}{\pi\left(\beta^2+x^2\right)^2}$$

第 12 章综合习题

1 证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 的整数倍的闭区间上一致收敛，但它不是任意在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积的 Fourier 级数.

证明：不妨只考虑 $(0,2\pi)$ 的内闭区间 I. 由于 $\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}^{\infty}$ 对于任何 x，都单调递减，一致趋于 0; $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$，所以由 Dirichlet 判别法，在 I 上一致收敛。 □

假设平方可积，那么积分为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$$

但是右侧的级数不收敛，因此矛盾! □

2 证明下列等式：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$ $(-\pi<x<\pi)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)$ $(0<x<2\pi)$

证明：(1) 设 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n}, B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$，由 Dirichlet 判别法知 $A,B\in\mathbb{R}$，考虑 $A+B\mathrm{i}$，因为 $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\pi)}\right|=1$，所以：

$$A+B\mathrm{i}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{e}^{nx\mathrm{i}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\left(\mathrm{e}^{(x+\pi)\mathrm{i}}\right)^n}{n}=\ln\left(1-\mathrm{e}^{(x+\pi)\mathrm{i}}\right)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}\right)$$

因为 $A,B\in\mathbb{R}$，所以：

$$A=\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}\right)+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x\mathrm{i}}\right)}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\cos x\right)=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$$

证明：(2) 因为 $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|=1$，所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{inx}\right)}{n}=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n}\right)=\mathrm{Re}\left(-\ln\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right)=\frac{-\ln\left(\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)}{2}$$
$$=\frac{-\ln\left(2-2\cos x\right)}{2}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

3　设 f 是以 2π 为周期的可积且绝对可积函数，求证：

(1) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上递减，则 $b_n\geqslant 0$. (2) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上递增，则 $b_n\leqslant 0$.

证明：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$\forall k=1,2,\cdots,n$，由于 f 在 $\left(\dfrac{2(k-1)\pi}{n},\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ 单增 (减)，则

$$\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(4k-1)\pi}{2n}}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin nx\mathrm{d}x\leqslant(\geqslant)0$$

因此 $b_n\leqslant(\geqslant)0$. □

4　设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数，如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调，证明：

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right), b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)$$

证明：不妨设 f 在 $(-\pi,\pi)$ 单增。取 $[-\pi,\pi]$ 的分割：$T: x_k=\dfrac{k\pi}{n}-\pi, k=0,1,\cdots,2n$. 因为 f Riemann 可积，所以 f 在 $[-\pi,\pi]$ 有界，因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k=\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}f(x)-\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]}f(x)\triangleq M$，其中 $\omega_k=\max\limits_{x',x''\in[x_{2k-2},x_{2k}]}|f(x')-f(x'')|$. 因此，我们有：

$$\begin{aligned}
b_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}}\sin nx\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\\
=&\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-1}}^{x_2k}|\sin nx|\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\implies |b_n| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-1}}^{x_2k}|\sin nx|\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_k = \frac{M}{n}$$

同理：

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}}|\cos nx|\omega_k\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_k = \frac{M}{n}$$

因此，$a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\to\infty)$. □

5 设 f 在 $[-a,a]$ 上连续，且在 $x=0$ 处可导，求证：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x$$

证明：因为 f 在 $x=0$ 处有导数，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $x=0$ 不是 $\frac{f(x)}{x}$ 的瑕点，因此 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[-a,a]\setminus\{0\}$ 连续有界. 于是等价于证明：$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{x}\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$，设 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\in[-a,a]\setminus\{0\}\\ f'(0), & x=0\\ 0, & x\notin[-a,a]\end{cases}$，

于是 g 在 $[-a,a]$ 连续有界，可积。即证：$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}g(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$

由 Riemann 引理，易知上式成立. □

6 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明：由 Riemann 引理：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\cos x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

7 设 f 是周期为 2π 的连续函数，令

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

用 $a_n, b_n; A_n, B_n$ 分别表示 f 和 F 的 Fourier 系数，证明：

$$A_0 = a_0^2,\ A_n = a_n^2+b_n^2,\ B_n = 0$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

证明：

$$\begin{aligned}A_n =&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\cos nx\right)\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi}f(x)\cos(n(x-t))\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos nx\cos nt+\sin nx\sin nt\right)\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)\mathrm{d}t\\
&=a_n^2+b_n^2,\ n\in\mathbb{N}_+
\end{aligned}
$$

$$
A_0=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi}f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=a_0^2
$$

$$
\begin{aligned}
B_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\sin nx\right)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi}f(x)\sin(n(x-t))\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\sin nx\cos nt+\sin nt\cos nt\right)\right)\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(b_n\cos nt-a_n\sin nt\right)\mathrm{d}t\\
=&0
\end{aligned}
$$

由于 f 连续，所以 F 连续，因此：

$$
\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{A_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^2+B_n^2\right)=F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x
$$

即 $f(x)$ 的 Parseval 等式成立。 □

8 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且在此区间上有可积且平方可积的导数 f'，如果 f 满足 $f(-\pi)=f(\pi)$, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$，等号当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立.

证明：设 f 和 f' 的 Fourier 系数分别为 $a_n,b_n;a_n',b_n'$. 由 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 知 $a_0=0$；由 f 连续且 $f(-\pi)=f(\pi)$ 知 $a_0'=0$. 由于 f,f' 可积且平方可积，由 Parseval 等式：

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\left(f'^2(x)-f^2(x)\right)\mathrm{d}x=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2-a_n^2-b_n^2\right)
$$

因为：

$$
a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{b_n'}{n}
$$

$$
b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a_n'}{n}
$$

所以：

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\left(f'^2(x)-f^2(x)\right)\mathrm{d}x=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\left(n^2-1\right)\geqslant 0
$$

当且仅当 $\forall k>1, a_k=b_k=0$ 时取等。此时，$f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$. □

第十三章　反常积分和含参变量的积分

13.1　反常积分

定理 13.1: 积分第二中值定理

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明：不妨设 $g(x)$ 单调递增，作 $[a,b]$ 的分割 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，记 $h(x)=g(b)-g(x)\geqslant 0$，则 $h(x)$ 单调递减，有：

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)h(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n h(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\left(h(x)-h(x_{k-1})\right)\mathrm{d}x$$

设 $\omega_k = \sup\limits_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]}|g(x')-g(x'')|$，则 $\left|\sum\limits_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\left(h(x)-h(x_{k-1})\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k$，由于 $g(x)$ 可积，所以 $\lim\limits_{\|T\|\to0^+}\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k$. 因此

$$\lim_{\|T\|\to0^+}\sum_{k=1}^n h(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x$$

设 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，由 Abel 求和公式：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n h(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n h(x_{k-1})\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left(h(x_{k-1})-h(x_k)\right)+F(b)h(x_{n-1})\end{aligned}$$

因为 $h(X)$ 单减且 $h(b)=0$，所以 $\sum\limits_{k=1}^n h(x_{k-1})\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x\in[mh(a),Mh(a)]$，其中 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}F(x), M=\max\limits_{x\in[a,b]}F(x)$，令 $\|T\|\to0^+$ 即得：

$$mh(a)\leqslant\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x\leqslant Mh(a)$$

因此 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$，也即：

$$\int_a^b f(x)\left(g(b)-g(x)\right)\mathrm{d}x = \left(g(b)-g(a)\right)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

定理 13.2: Dirichlet 判别法

如果 $[a,+\infty)$ 上的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：$\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有界；$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. 那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 13.3: Abel 判别法

如果 $[a,+\infty)$ 上的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；$g(x)$ 单调有界. 那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 13.4: Cauchy 判别准则

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 有定义，在 $(a,b]$ 内闭 Riemann 可积，且 $x\to a^+$ 时 $f(x)$ 无界。则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall 0<\eta',\eta''<\delta,\left|\displaystyle\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$

证明：" $\Longleftarrow$ " 易证，我们下面证明" $\Longrightarrow$ "：任取 $(a,b]$ 中的数列 $\{a_n\}^\infty$ 满足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=a$，记 $F(x)=\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$. 由题知 $\{F(a_n)\}^\infty$ 有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在收敛的子列：$\{F(a_{n_k})\}^\infty$

1 判断下列反常积分的收敛性

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\mathrm{d}x&=\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\mathrm{d}x+\int_{+\infty}^1\frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{-t}\mathrm{d}t\\&=2\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x\\&>2\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\ln x\end{aligned}$$

因此发散到正无穷。

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

解：因为 $x+1\geqslant 2\sqrt{x}$，所以：

$$0\leqslant\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\left.\frac{(-x-2)\mathrm{e}^{-x}}{2}\right|_0^{+\infty}=1$$

因此收敛。

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\mathrm{d}x$

解：因为 $\dfrac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\sim\frac{\pi}{2}x^{-\frac{1}{3}}\ (x\to+\infty)$，所以积分发散到正无穷。

(4) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln\ln x}$

解：假设收敛，则 $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln\ln x}=\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\ln x}$，因为 $\ln x=o(x)\ (x\to+\infty)$，所以发散到正无穷。

(5) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，所以：

$$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\ln x d\arcsin x=\ln x\arcsin x|_0^1-\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx=-\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\arcsin x}{x}=1$，所以收敛。

(6) $\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$

解：当 $x\to1^-$ 时，$\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=\frac{(1-t)^2}{t^{\frac53}(2-t)^{\frac53}}\sim\frac{1}{(2t)^{\frac53}}$，所以发散。

(7) $\int_0^1\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

解：因为 $\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}\sim x^{-\frac12}\ (x\to0^+)$，所以积分收敛。

(8) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

解：当 $x\to1$ 时，$\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sin x+o(x^2)}=\frac{\sqrt{x}}{x+o(x)}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$，因此积分收敛。

(9) $\int_0^1\frac{dx}{e^x-\cos x}$

解：因为 $\frac{1}{e^x-\cos x}\sim\frac{1}{\frac{x^2}{2}+x+1-1+\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{x(x+1)}\sim\frac1x$，所以发散。

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$

解：因为 $\sin x\sim x\ (x\to0)$，$\ln x=o(\sqrt{x})\ (x\to+\infty)$，所以 $\ln\sin x=o\left(x^{-\frac12}\right)\ (x\to0^+)$，也即 $\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}=o(x^{-1})\ (x\to0^+)$，因此发散到负无穷。

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos x}}$

解：在 $x\to\frac{\pi}{2}^-$ 处，设 $x=\frac{\pi}{2}-t,t\to0^+$，于是 $\frac{1}{\sqrt{\sin x\cos x}}\sim\frac{1}{\sin t}\sim\frac1t$，因此发散。

(12) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}dx$

解：因为 $\frac{\arctan x}{x^\mu}\sim\frac{\pi}{2x^\mu}$，所以，如果 $\mu>1$，则收敛；如果 $\mu\leqslant1$，则发散。

2 研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

解：因为 $\cos(1-2x)$ 积分一致有界，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 单减趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 收敛。

因为 $\dfrac{|cos(1-2x)|}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}>\dfrac{\cos^2(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}=\dfrac{\cos(2-4x)}{2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos(2-4x)}{2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 由 Dirichlet 判别法知收敛，而 $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\sim\dfrac{1}{2x}$，积分发散。因此，积分条件收敛。

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$

解：因为 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 单调递减趋于 0，$\displaystyle\int_0^x\sin t\mathrm{d}t$ 有界，由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$ 收敛。又因为 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\right|\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}-\dfrac{\cos 2x}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$，$\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$，所以发散。因此条件收敛。

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$

解：因为 $\dfrac{1}{x\ln x}$ 单调递减趋于 0，$\displaystyle\int_0^x\sin t\mathrm{d}t$ 有界，所以由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛。又因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x\ln x}\right|\geqslant\dfrac{1}{2x\ln x}-\dfrac{\cos 2x}{2x\ln x}$，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\ln\ln x|_2^{+\infty}=+\infty$，所以发散。因此条件收敛。

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\mathrm{d}x\ (p>0)$

解：因为 $\ln(1+x)=o\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\ (x\to+\infty)$，所以 $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}=o\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\ (x\to+\infty)$，因此收敛。又因为 $\ln(1+x)>0\ (x>0)$，所以绝对收敛。

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}\mathrm{d}x$

解：因为 $\dfrac{1}{x(1+\sqrt{x})}$ 单调递减趋于 0，$\int_0^x\sin t\mathrm{d}t$ 有界，所以由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}\mathrm{d}x$ 收敛。又因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}\right|\geqslant\dfrac{1}{2x(1+\sqrt{x})}-\dfrac{\cos 2x}{2x(1+\sqrt{x})}$，$\dfrac{1}{x(1+\sqrt{x})}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$，所以发散。因此条件收敛。

(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$

解：因为 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t$，又 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以当 $p<1$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|t^{p-2}\sin t\right|\mathrm{d}t<\int_1^{+\infty}t^{p-2}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-p}$，所以绝对收敛。

当 $p\in[1,2)$ 时，因为 $\displaystyle\int_1^x\sin t\mathrm{d}t$ 有界，t^{p-2} 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法，收敛。又 $\displaystyle\int_1^x\left|\frac{\sin t}{t^{2-p}}\right|\mathrm{d}t>\int_1^x\frac{\sin^2 t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{2t^{2-p}}-\int_1^x\frac{\cos 2t}{2t^{2-p}}\mathrm{d}t$，$\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{2t^{2-p}}$ 发散，$\displaystyle\int_1^x\frac{\cos 2t}{2t^{2-p}}\mathrm{d}t$ 收敛，则发散到正无穷。所以条件收敛。

当 $p\geqslant 2$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\displaystyle\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right|\geqslant\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2$，因此发散。

综上，$p<1$ 时绝对收敛；$p\in[1,2)$ 时条件收敛；$p>1$ 时发散。

3 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调、连续，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

证明：不妨设 $f(x)$ 单减，则 $\forall x\geqslant a, f(x)\geqslant 0$，否则发散。由 Cauchy 收敛定理，$\forall\varepsilon>0,\exists A>a,\forall x\geqslant y>A,\left|\displaystyle\int_y^x f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$，取 $y=\dfrac{x}{2}$，则得 $\forall x>A,\left|\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$，则 $0\leqslant xf(x)\leqslant 2\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$，即 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0,\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$ □

4 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非负，$\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且当 $0<x<y$ 时，有 $f(y)\leqslant f(x)+\displaystyle\int_x^y g(t)\mathrm{d}t$，求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

证明：设 $h(x)=f(x)-\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，由 $\forall y>x>0, f(y)\leqslant f(x)+\displaystyle\int_x^y g(t)\mathrm{d}t=f(x)+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 知 $h(y)\leqslant h(x)$，也即 $h(x)$ 单调递减。因为 $h(x)=f(x)-\displaystyle\int_0^x h(t)\mathrm{d}t\geqslant-\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t\in\mathbb{R}$，所以 $h(x)$ 单调递减有下界，因此 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)$ 存在，又 $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 存在，所以 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. □

5 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负，$g(x)$ 单调递减趋于 0，且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$

证明：由 Cauchy 收敛准则，$\forall\varepsilon>0,\exists B>0,\forall x>A>B,\displaystyle\int_A^x f(t)g(t)\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}$，则 $\dfrac{\varepsilon}{2}>\displaystyle\int_A^x f(t)g(t)\mathrm{d}t>g(x)\int_A^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$. 记 $\displaystyle\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=M$，因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$，所以对于 $\varepsilon>0,\exists C>0,\forall x>C,0\leqslant g(x)<\dfrac{\varepsilon}{2M}$ 取足够大的 x，使得 $g(x)<\dfrac{\varepsilon}{2M}$. 此时，取 $x>C$，则有 $g(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$. 因此，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$ □

6 设 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$，$g$ 在任意有限区间上可积，求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=0$

证明：因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall y>x\geqslant A,\displaystyle\int_x^y |f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$，所以 $\exists B>0,\forall x>B,|g(x)|<\varepsilon$. 取 $S>A+B$，于是：

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^S f(t)g(S-t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \varepsilon\int_0^A |f(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon^2+\varepsilon\sup_{x\in[0,B]}|g(x)|=\varepsilon\left(\int_0^A |f(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon+\sup_{x\in[0,B]}|g(x)|\right)\\
&\leqslant \varepsilon\left(\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon+\sup_{x\geqslant 0}|g(x)|\right)
\end{aligned}
$$

因此 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=0.$ □

13.2 反常多重积分

定义 13.1: 竭尽递增列 (Exhaust)

设 D 是无界区域，若 D 的子区域列 $\{D_n\}^\infty$ 满足：$\forall i<j, D_i\subset D_j\subset D$；$\forall k\in\mathbb{N}_+, D_k$ Jordan 可测；$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k=D$，那么称 $\{D_n\}^\infty$ 为 D 的一个竭尽递增列 (Exhaust).

定义 13.2: 设 f 在无界区域 D 有定义，在 D 的任何有界 Jordan 可测子集可积，$\{D_n\}^\infty$ 是 D 的一个竭尽递增列。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{D_n} f\mathrm{d}\sigma$ 存在且不依赖于 D 的竭尽递增列的选取，则 f 在 D 的反常积分存在，记为 $\iint_D f\mathrm{d}\sigma$.

定理 13.5: 设 f 在无界区域 D 有定义，且 f 非负，则若存在 D 的一个竭尽递增列 $\{D_n\}^\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{D_n} f\mathrm{d}\sigma$ 存在，那么 $\iint_D f\mathrm{d}\sigma$ 存在。

证明：设 D 的竭尽递增列 $\{S_n\}^\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{S_n} f\mathrm{d}\sigma = A$，任取 D 的一个竭尽递增列 $\{D_n\}^\infty$. 因为 $S_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$，所以 $\exists N\in\mathbb{N}, D_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} S_k$. 记 $B_n = \int_{D_n} f\mathrm{d}\sigma$，于是 $B_n \leqslant \iint_{\bigcup_{k=1}^N S_k} f\mathrm{d}\sigma$，所以 $B_n \leqslant A$，且 $\{B_n\}^\infty$ 单调递增，于是存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \leqslant A$. 同理，$A \leqslant B$，于是 $A = B$. □

定理 13.6: 设 D 是无界区域 (非一维)，那么：$\int_D f\mathrm{d}\sigma$ 存在 $\iff$ $\int_D |f|\mathrm{d}\sigma$ 存在。

1　计算反常积分：

(1)　$\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 D 是单位圆内部。易知积分收敛，因此可以转化为累次积分。

解：

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{r}{r}\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

(2)　$\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha}$，其中 D 是第一象限，$\alpha>2$.

解：易知积分收敛，因此可以转化为累次积分。设变换 $(u,v)=(x+y,x-y), \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2}, (u,v)\in \{(u,v)\,|u\geqslant 0,-u\leqslant v\leqslant u\}$

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha}\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{d}u\int_{-u}^{u}\frac{1}{(1+u)^\alpha}\mathrm{d}v\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{u\mathrm{d}u}{(1+u)^\alpha}\\
=&\int_0^{+\infty}u\mathrm{d}\frac{1}{(1-\alpha)(1+u)^{\alpha-1}}\\
=&\left.\frac{u}{(1-\alpha)(1+u)^{\alpha-1}}\right|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1-\alpha)(1+u)^{\alpha-1}}\\
=&\left.\left(\frac{u}{(1-\alpha)(1+u)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(1+u)^{\alpha-2}}\right)\right|_0^{+\infty}\quad(\alpha>2)\\
=&\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}
\end{aligned}$$

(3)　$\iint_D \max\{x,y\}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是第一象限.

解：易知积分收敛，因此可以转化为累次积分。

$$\iint_D \max\{x,y\}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\max\{r\cos\theta,r\sin\theta\}\,\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}\theta\\
&=2\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty}e^{-r}\mathrm{d}r\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

2 借用 Fresnel 积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 验证下列累次积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y=\pi$$

并证明函数 $\sin\left(x^2+y^2\right)$ 在定义 13.14 意义下在 $\mathbb{R}^2$ 上的反常二重积分发散. (提示：分别考虑 $\mathbb{R}^2$ 的两个竭尽递增列 $D_n=\{(x,y)||x|\leqslant n,|y|\leqslant n\}$ 和 $B_n=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2\leqslant 2n\pi\right.\right\}$).

证明：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2\right)\mathrm{d}x\\
=&\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sin y^2+\cos y^2\right)\mathrm{d}y\\
=&\pi
\end{aligned}
$$

另一式同理成立. □

证明：注意到：$\forall R>0$，$\int_{B(O,R)}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^R\sin r^2r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi\left(1-\cos R^2\right)$. 取竭尽递增列：$D_n=B\left(O,\sqrt{2n\pi}\right),S_n=B\left(O,\sqrt{(2n+1)\pi}\right)$，易知 $\iint_{D_n}=0,\iint_{S_n}=2\pi$，所以依赖于竭尽递增列的选取，不收敛. □

13.3　含参变量的积分

定理 13.7: 含参积分函数的连续性

若函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致连续。

证明：因为 f 在有界闭区域 I 连续，所以 f 一致连续。$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x_1,u_1),(x_2,u_2)\in I$，当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(u_1-u_2)^2}<\delta$ 时，$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon$.

因此，$\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，当 $|u-u_0|<\delta$ 时：

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|=\left|\int_a^b\left(f(x,u)-f(x,u_0)\right)\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon$$

于是 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(u)$ 在 u_0 处连续，因此在 $[\alpha,\beta]$ 连续，则一致连续. □

推论 13.1: 连续性推广到开区间 (α,β)

使用类似的方法，我们易证：φ 在 (α,β) 内闭一致连续，因此在 (α,β) 连续. □

定理 13.8: 含参积分函数的积分

若 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 的积分为

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

定理 13.9: 含参积分函数积分号下求导

若 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且对 u 有连续的偏导数 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$，那么 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 可微，并且求导和积分可交换顺序.

证明：令 $g(u)=\int_a^b \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$，于是

$$\int_\alpha^t g(u)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^t \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(f(x,t)-f(x,\alpha)\right)\mathrm{d}x=\varphi(t)-\varphi(\alpha)$$

注 13.1: 当 $f(x,u)$ 连续时，$\varphi(u_0)=\lim\limits_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim\limits_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x$ 实质是两个极限交换顺序，而这需要某种“一致性”使得能够交换。

定理 13.10: 变限含参积分的连续性

若 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$a(u),b(u)\in[a,b]$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，那么 $\varphi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致连续.

证明：因为 f 在有界闭区域 I 连续，所以 f 一致连续。$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x_1,u_1),(x_2,u_2)\in I$，当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(u_1-u_2)^2}<\delta$ 时，$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon$. 同理，$a(u),b(u)$ 一致连续，对于上述 $\varepsilon>0,\exists\delta'>0$ 使得：当 $u',u''\in[\alpha,\beta]$ 且 $|u'-u''|<\delta'$ 时，$|a(u)-a(u_0)|,|b(u)-b(u_0)|<\varepsilon$.

因为 f 在有界闭区域 I 连续，所以有界，设 $M=\max\limits_{(x,u)\in I}|f(x,u)|$. $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，当 $|u-u_0|<\min\{\delta,\delta'\}$ 时，有：

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)|&=\left|\left(\int_{a(u)}^{a(u_0)}+\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}+\int_{b(u_0)}^{b(u)}\right)f(x,u)\mathrm{d}x-\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\left(\int_{a(u)}^{a(u_0)}+\int_{b(u_0)}^{b(u)}\right)f(x,u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}\left(f(x,u)-f(x,u_0)\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left(|a(u)-a(u_0)|+|b(u)-b(u_0)|\right)M+|b(u_0)-a(u_0)|\varepsilon\\&<\left(2M\varepsilon+b-a\right)\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)$，$\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，则一致连续. □

推论 13.2: 连续性推广到开区间 (α,β)

使用类似的方法，我们易证：φ 在 (α,β) 内闭一致连续，因此在 (α,β) 连续. □

定理 13.11: 变限含参积分求导

设 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续，且对 u 有连续的偏导数，$a(u),b(u)\in[a,b]$ 可微，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可微，且 $\varphi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f\left(b(u),u\right)b'(u)-f\left(a(u),u\right)a'(u)$.

证明：

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(u_0)}{u-u_0}=\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}\frac{f(x,u)-f(x,u_0)}{u-u_0}\mathrm{d}x+\frac{1}{u-u_0}\int_{a(u)}^{a(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x+\frac{1}{u-u_0}\int_{b(u_0)}^{b(u)}f(x,u)\mathrm{d}x$$

由积分第一中值公式，$\exists\xi$ 介于 $a(u),a(u_0)$ 之间，$\exists\eta$ 界于 $b(u),b(u_0)$ 之间，使得：

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(u_0)}{u-u_0}=\frac{a(u_0)-a(u)}{u-u_0}f(\xi,u)+\frac{b(u)-b(u_0)}{u-u_0}f(\xi,u)+\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}\frac{f(x,u)-f(x,u_0)}{u-u_0}\mathrm{d}x$$

于是，当 $u\to u_0$ 时：

$$\varphi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f\left(b(u),u\right)b'(u)-f\left(a(u),u\right)a'(u)$$

定理 13.12: Euler-Lagrange 方程/最速降线/变分法

设竖直平面上有高度不同的两个点 A,B，试求一条光滑曲线 L，使得质点从 A 点由静止释放，沿 L 无摩擦运动到 B 点时间最短。

解：以 A 为原点，指向 B 的水平方向为 x 轴正向，指向 B 的竖直方向为 y 轴正向，建立平面直角坐标系 xOy. 设 $L:y=y(x),y(0)=0,y(x_0)=y_0$. (以下讨论的函数均设为光滑函数) 于是有：

$$\begin{cases}v(x)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\ \mathrm{d}x=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x\\ \dfrac{mv^2(x)}{2}=mgy(x)\end{cases}\implies \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{v(x)}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{y(x)}}\implies T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{y(x)}}\mathrm{d}x$$

设泛函 $F(y,y')=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$. 因为 T 有下界，所以有下确界，设 $f(x)$ 使得 $T(f)=\inf T(y)$. 任取 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(0)=\varphi(x_0)=0$，设参数 $t\geqslant 0$，于是 $y=f+t\varphi$ 也是一条曲线 L 的方程，$T(f+t\varphi)\geqslant T(f)$. 因为 $F(y,y')$ 光滑，所以 T 关于 t 光滑，于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}T(f+t\varphi)=0$. 因为：

$$\begin{aligned}&\sqrt{2g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(f+t\varphi)=\int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(f+t\varphi,f'+t\varphi')(x)\mathrm{d}x=\int_0^{x_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\varphi(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi'(x)\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{x_0}\frac{\partial F}{\partial y}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^{x_0}\frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}\varphi(x)=\int_0^{x_0}\frac{\partial F}{\partial y}\varphi(x)\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi(x)\right|_0^{x_0}-\int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{x_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以，代入 $t=0$，由 $\varphi(x)$ 的任意性知：$\dfrac{\partial F}{\partial f}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial f'}=0$，也即 Euler-Lagrange 方程.

注意到：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f'\dfrac{\partial F}{\partial f'}\right)=f''\dfrac{\partial F}{\partial f'}+f'\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial f'}=f''\dfrac{\partial F}{\partial f'}+f'\dfrac{\partial F}{\partial f}=\dfrac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial f'}+\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial f}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(f,f')$，所以：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-f'\dfrac{\partial F}{\partial f'}\right)=0\implies F-f'\dfrac{\partial F}{\partial f'}=k\iff\dfrac{1}{\sqrt{f\left(1+f'^2\right)}}=k$. 于是，考虑 $x>0$ 时的情况，设 $k=\dfrac{1}{a^2},a>0$，于是 $f\left(1+f'^2\right)=a$，化为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\dfrac{a-f}{f}}$.

注意到:这是一个一元二阶非线性方程,所以分离变量:$\mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{f}{a-f}}\mathrm{d}f$. 使用参数方程,替换 $a=2R$,设 $y=R(1-\cos\theta),\theta\in[0,\alpha]\subset[0,\pi]$，得：$\mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{R(1-\cos\theta)}{R(1+\cos\theta)}}R\sin\theta\mathrm{d}\theta=R\dfrac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=R(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta=R\mathrm{d}(\theta-\sin\theta)$，所以 $x=R(\theta-\sin\theta)+C$，又因为 $y\big|_{\theta=0}=0$，所以 $x\big|_{\theta=0}=0$，于是 $C=0$. 所以曲线 L：$\begin{cases}x=R(\theta-\sin\theta)\\ y=R(1-\cos\theta)\end{cases},\theta\in[0,\alpha]$，且满足条件：$\begin{cases}R(\alpha-\sin\alpha)=x_0\\ R(1-\cos\alpha)=y_0\end{cases},\alpha\in(0,\pi]$.

1　试用两种办法计算以下极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$

解：一方面，因为：

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2+1}-\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{x^2+1}+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x-\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+\frac{\operatorname{arcsinh}x}{2}+C\end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x &= \alpha^2\int_{-\frac{1}{|\alpha|}}^{\frac{1}{|\alpha|}}\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\alpha^2}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\operatorname{arcsinh}x\right)\Big|_{-\frac{1}{|\alpha|}}^{\frac{1}{|\alpha|}}\\ &= \frac{\alpha^2}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big|_{-\frac{1}{|\alpha|}}^{\frac{1}{|\alpha|}}\\ &= \alpha^2\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{|\alpha|}}\\ &= \sqrt{\alpha^2+1}+\alpha^2\ln\left(1+\sqrt{\alpha^2+1}\right)-\alpha^2\ln|\alpha|\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=1.$

另一方面，因为 $\sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的有界区域一致连续，所以

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=1$$

(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$

解：一方面，因为：

$$\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{\arctan\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{\arctan\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{2\alpha^2+\alpha+1}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

所以：$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arctan\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{2\alpha^2+\alpha+1}}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{\pi}{4}.$

另一方面，因为 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的有界区域一致连续，所以

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

2　求 $F'(\alpha)$

(1) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}F'(\alpha) &= -\mathrm{e}^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha-\mathrm{e}^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha-\mathrm{e}^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha+\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\alpha|\cos x|}|\cos x|\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(2) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x.$

解：

$$F'(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\mathrm{d}x+\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}=\frac{b\sin\alpha(b+\alpha)}{\alpha(b+\alpha)}-\frac{a\sin\alpha(a+\alpha)}{\alpha(a+\alpha)}$$

(3) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$

解：

$$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}\mathrm{d}x+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}=\frac{2\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}$$

(4) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$，$f(u,v)$ 有连续的偏导数.

解：

$$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha))\mathrm{d}x+f(2\alpha,0)$$

3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t\quad c,x\in[a,b)$$

满足常微分方程

$$y''+k^2y=f(x)$$

其中 c,k 是常数.

证明：

$$y'(x)=\int_c^x f(t)\cos k(x-t)\mathrm{d}t$$

$$y''(x)=-k\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t+f(x)$$

因此 $y''+k^2y=f(x)$.　□

4　应用对参数进行微分或积分的方法，计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\mathrm{d}x$，$a>0,b>0$.

解：令：

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2+b^2+\left(b^2-a^2\right)\cos 2x\right)\mathrm{d}x-\frac{\pi\ln 2}{2}$$

当 $a\neq b$ 时，利用万能公式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}I(a,b)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a(1-\cos 2x)}{a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos 2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2a\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{a^2+b^2+(b^2-a^2)\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{(b^2+a^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2a}{a^2-b^2}\frac{1}{t^2+1}-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\frac{1}{b^2+a^2t^2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\pi a}{a^2-b^2}-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\frac{\pi}{2ab}\\
&=\frac{\pi}{a+b}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=I(a,b)=I(b,b)+\int_b^a \frac{\pi}{t+b}\mathrm{d}t=\pi\ln\frac{a+b}{2}
$$

当 $a=b$ 时：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\pi\ln a$ 因此，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{a+b}{2}$.

(2) (Poission 积分) $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$，$a\in[0,1)$.

解：记 $I(a)=\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}I(a)&=\int_0^{\pi}\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{2a-2\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+a^2-2a\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\\
&=4\int_0^{+\infty}\frac{(a+1)t^2+(a-1)}{(t^2+1)\left((a+1)^2t^2+(a-1)^2\right)}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{a\left(1+t^2\right)}+\frac{2\left(a^2-1\right)}{a\left((a+1)^2t^2+(a-1)^2\right)}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{a}+\frac{2\left(a^2-1\right)}{a(a+1)(1-a)}\frac{\pi}{2}\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x=0
$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$，$a\geqslant 0$.

解：记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$. 当 $a=1$ 时：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}
$$

当 $a\neq 1$ 时：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}I(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+a^2t^2\right)\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{a^2}{a^2t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{2(a+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x=0+\int_0^a\frac{\pi}{2(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln(a+1)
$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$，$a\in[0,1)$.

解：记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}I(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{2-a^2-a^2\cos 2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{4}{2-a^2-a^2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1-a^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=0+\int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\pi\arcsin a$$

13.4　含参变量的反常积分

考虑定义在 $[a,+\infty)\times I$ 上的连续函数 $f(x,u)$ 的含参反常积分函数 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x, u\in I$. 这里的 I 是 $\mathbb{R}$ 上的任意区间 (开区间、闭区间、半开半闭区间).

定义 13.3: 含参反常积分的一致收敛性

如果

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall A>X,\forall u\in I,\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

那么称反常积分在 I 上一致收敛。这里的 I 可以是任意的区间。

定理 13.13: 含参反常积分一致收敛等价命题

$f(x,u)$ 的含参反常积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x, u\in I$ 一致收敛等价于：

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{u\in I}\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|=0$$

定理 13.14: Cauchy 一致收敛准则

积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是：

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall A',A''>X,\forall u\in I,\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

证明：必要性：当 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 对于 $u\in I$ 一致收敛时，由定义知：

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall A>X,\forall u\in I,\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

因此，对于上述 $\varepsilon>0$，当 $A',A''>X$ 时：

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{A'}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A''}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|<2\varepsilon$$

充分性：由条件易知 $\displaystyle\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$ 有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在 $[a,+\infty)$ 上发散到正无穷的数列 $\{x_n\}^\infty$，使得 $\{y_n\}^\infty : y_n = \displaystyle\int_a^{x_n} f(x,u_0)\mathrm{d}x$ 是收敛数列，设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell \in \mathbb{R}$. 因为：

$$\varepsilon > 0, \exists X > a, \forall A', A'' > X, \left|\int_{A'}^{A''} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

同时，对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |y_n - \ell| < \varepsilon, x_n > X$. 于是则有：

$$\forall A > x_{N+1}, \left|\int_a^A f(x,u_0)\mathrm{d}x - \ell\right| \leqslant \left|\int_a^{X_{N+1}} f(x,u_0)\mathrm{d}x - \ell\right| + \left|\int_{X_{N+1}}^A f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| < 2\varepsilon$$

又因为对于 $u \in I$，只需将 $f(x,u_0)$ 替换成 $f(x,u)$ 即可，所以上述过程对于 $\forall u \in I$ 是一致的，因此 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \rightrightarrows \varphi(u)$. □

定理 13.15: Weierstrass 判别法

设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 连续，若存在 $[a,+\infty)$ 上的可积函数 $g(x)$ 使得 $\exists M > a, \forall x > M, \forall u \in I, |f(x,u)| \leqslant g(x)$，那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛。此时称 $g(x)$ 为 $f(x,u)$ 的控制函数。

证明：因为 $\exists M > a, \forall x > M, \forall u \in I, |f(x,u)| \leqslant g(x)$，所以不妨设 $M \geqslant a$. 因为 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可积，所以 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists S \geqslant M, \forall A > S, \displaystyle\int_A^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$，因此 $\forall u \in I, \left|\displaystyle\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_A^{+\infty} |f(x,u)|\,\mathrm{d}x \leqslant \displaystyle\int_A^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$. 因此 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛. □

定理 13.16: Dirichlet 判别法

设 $f(x,u), g(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 内闭可积，且：

(1) $\displaystyle\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$ 对于 $A \geqslant a$ 和 $u \in I$ 一致有界。

(2) $\forall u_0 \in I, g(x,u_0)$ 是关于 x 的单调函数，且 $\forall u \in I, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x,u) \rightrightarrows 0$.

那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛。

证明：设 $M = \sup\limits_{x\geqslant a}|f(x,u)|$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,u) \rightrightarrows 0$，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, \forall u \in I, |g(x,u)| < \varepsilon$.

由积分第二中值公式，当 $B > A$ 时，$\exists \xi \in [A,B]$ 使得：

$$\left|\int_A^B f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x\right| = \left|g(A)\int_A^\xi f(x,u)\mathrm{d}x + g(B)\int_\xi^B f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant (B-A)M\varepsilon$$

因此，由 Cauchy 收敛准则，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛. □

定理 13.17: Abel 判别法

设 $f(x,u), g(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 内闭可积，且：

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u \in I$ 一致收敛。

(2) $\forall u_0 \in I, g(x,u_0)$ 是关于 x 的单调函数，且关于 $u \in I$ 一致有界。

那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛。

证明：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,u) = h(u)$，其中 $h(u)$ 是有界函数，那么 $f(x,u)g(x,u) = f(x,u)(g(x,u)-h(u)) + f(x,u)h(u)$，由于 $f(x,u)(g(x,u)-h(u))$ 满足 Dirichlet 判别法条件，$f(x,u)h(u)$ 积分与 u 无关，所以 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛. □

定理 13.18: 含参反常积分函数的连续性

设 $f(x,u)$ 是 $[a,+\infty)\times I$ 上的连续函数，$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \rightrightarrows \varphi(u), \forall u\in I$，于是 $\varphi(u)$ 是 I 上的连续函数。

证明：因为一致收敛，所以

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall A>X,\forall u\in I,\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

因为 $f(x,u)$ 连续，对于上述 $\varepsilon>0,A>X$，任取 $u_0\in I$，则 $\exists\delta>0,\forall|u-u_0|<\delta,$
$\left|\int_a^A \left(f(x,u)-f(x,u_0\right)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$，于是：

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)|=&\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\left|\int_a^A \left(f(x,u)-f(x,u_0)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|\\ <&\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\varphi(u)$ 是 I 上的连续函数。 □

定理 13.19: 含参反常积分函数的积分

设 $f(x,u)$ 是 $[a,+\infty)\times I$ 上的连续函数，$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \rightrightarrows \varphi(u), \forall u\in I$，$(\alpha,\beta)\subset I$，则：

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

证明：因为一致收敛，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall A>X,\forall u\in I,\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 由于 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续则可积，所以：

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u-\int_a^A\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\right|\\ =&\left|\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u-\int_\alpha^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\right|\\ =&\left|\int_\alpha^\beta\left(\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\right|\\ <&(\beta-\alpha)\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$ □

推论 13.3: 当 $f(x,u)$ 是 $[a,+\infty)\times(\alpha,\beta)$ 上的连续函数，而且在 (α,β) 的内闭区间 $\forall[\alpha+\delta_1,\beta-\delta_2]\subsetneqq(\alpha,\beta)$ 上，$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\rightrightarrows\varphi(u)$，并且已知 $\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，那么：

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u=\lim_{\substack{\delta_1\to0^+\\ \delta_2\to0^+}}\int_{\alpha+\delta_1}^{\beta-\delta_2}\varphi(u)\mathrm{d}u=\lim_{\substack{\delta_1\to0^+\\ \delta_2\to0^+}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\alpha+\delta_1}^{\beta-\delta_2} f(x,t)\mathrm{d}t$$

定理 13.20: 含参反常积分函数的导数

设 I 是 $\mathbb{R}$ 的有界区间，若 $f(x,u)$ 满足以下条件：

(1) $f(x,u)$ 和 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 连续；

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 上收敛；

(3) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛。

那么 $\varphi(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 上可微，且 $\varphi'(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$

证明：设 $[\alpha,\beta]\subset I$，则由上例，知：

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(f(x,\beta)-f(x,\alpha)\right)\mathrm{d}x=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$$

因为 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 连续且积分一致收敛，因此积分连续，由 Newton-Leibniz 公式，上式左边求导即为被积部分。所以对上式两边求导，即得 $\varphi'(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$ □

注 13.2: 上述 3 个性质：含参无穷积分函数的连续性、积分、导数，实质上都是积分和极限交换运算顺序.

定理 13.21: 逐点取极限定理

设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $u\in(\alpha,\beta)$ 一致收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 收敛，而且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明：我们先证明，反常积分在 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛。由 Cauchy 收敛准则：

$$\forall\varepsilon>0,\exists X\geqslant a,\forall A',A''>X,\forall u\in(\alpha,\beta),\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{(1)}$$

由 $f(x,u)$ 的连续性，令 (1) 式中 $u\to\alpha^+$，即得：

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(\alpha,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{(2)}$$

由 Cauchy 收敛准则，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\mathrm{d}x$ 收敛，同理，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛 (易证：加入有限个收敛点，一致性仍然成立)。设 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\rightrightarrows\varphi(u),u\in[\alpha,\beta]$. 由 $[\alpha,\beta]$ 上 $\varphi(u)$ 一致收敛，且 f 是 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，得 $\varphi(\alpha)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，因此一致连续. □

定理 13.22: 含参反常积分函数的反常积分

如果 $f(x,u)$ 满足以下条件：

(1) $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 连续；

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对于 u 在 $[\alpha,+\infty)$ 的任何有界内闭区间一致收敛，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 对于 x 在 $[a,+\infty)$ 的任何有界内闭区间一致收敛；

(3) 下列两个积分至少有一个存在：

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u,\quad \int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x$$

此时，积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 和 $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 存在且相等.

例子 13.1: Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

解：添加收敛因子 $\mathrm{e}^{-ux},u\geqslant 0$，考虑积分 $I(u)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$. 因为 $\int_0^A\sin x\mathrm{d}x$ 一致有界，$\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{x}$ 单调递减一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $I(u)$ 收敛。

$$I'(u)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{u^2+1}$$

所以 $I'(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛。又因为 $I(+\infty)=0$，所以 $\forall u>0,I(u)=0+\int_{+\infty}^u\frac{-\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{\pi}{2}-\arctan u$. 因为 $I(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，且 $\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-ux}$ 连续，所以 $I(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=I(0)=\frac{\pi}{2}$.

解：N.I.Lobachevsky 对于 $\forall a\notin\mathbb{Z}$，考虑 $\cos ax$ 的 Fourier 级数：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\right)\mathrm{d}x=\frac{2a(-1)^n\sin(a\pi)}{\pi\left(a^2-n^2\right)}$$

于是 $\cos ax=\frac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n\sin(a\pi)}{\pi\left(a^2-n^2\right)}\cos nx$，取 $x=0<$ 两边同时除以 $\sin(a\pi)$ 得：

$$\frac{1}{\sin(a\pi)}=\frac{1}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n}{\pi\left(a^2-n^2\right)}=\frac{1}{a\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n}\right)$$

于是,$\forall t\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$,令 $t=a\pi$,则 $\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t-n\pi}+\frac{1}{t+n\pi}\right)$. 又因为 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，将积分区间归一：

当 $n=2m$ 时，$\int_{m\pi}^{\frac{(2m+1)\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x+m\pi}\mathrm{d}x$;

当 $n=2m+1$ 时，$\int_{\frac{(2m+1)\pi}{2}}^{(m+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=(-1)^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{m\pi-x}\mathrm{d}x$

所以 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)\sin x\mathrm{d}x$. 因为当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)\sin x\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}=\frac{\pi}{6}$$

所以函数项级数绝对一致收敛，无穷求和与积分可以交换顺序。因此：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

例子 13.2: Laplace 积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\ (\alpha>0,\beta\geqslant 0);\ J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\ (\alpha>0,\beta>0)$$

解：因为 $|I(\beta)|\leqslant I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$，由 Weierstrass 判别法，$I(\beta)$ 在 $\beta\in[0,+\infty)$ 一致收敛。$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{-x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=-J(\beta)$，因为 $\max\limits_{A>0}\left|\int_0^A\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{A}$，$\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 单调递减一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\forall\delta>0,J(\beta)$ 和 $I'(\beta)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛.

对 $J(\beta)$ 在积分号下求导，得 $J'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x$，发散，因此需要将被积函数变为导数反常可积的函数。注意到：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，所以，当 $\beta\geqslant\delta$ 时：

$$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)}\mathrm{d}x$$

于是，当 $\beta\geqslant\delta$ 时，$J'(\beta)=-\alpha^2I(\beta)$，也即 $I'(\beta)=\alpha^2I(\beta)$，解得 $I(\beta)=C_1\mathrm{e}^{\alpha\beta}+C_2\mathrm{e}^{-\alpha\beta}$. 因为 $I(\beta)$ 对 β 有界，或者说 Riemann 引理，知 $C_1=0$，所以 $C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$，于是 $I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta},\beta>0$. 又因为 $I(\beta)$ 对于 $\beta\geqslant 0$ 一致收敛，连续，所以 $I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta},\beta\geqslant 0$. 当 $\beta>0$ 时，知 $J(\beta)=-I'(\beta)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}$.

例子 13.3: Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

解：易知 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. 因为 $\int_0^{A}\sin x\mathrm{d}x$ 有界，$\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛。下面构造累次积分：

注意到：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以 $\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu^2}\mathrm{d}u,x>0$. 因此

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu^2}\mathrm{d}u\right)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-xu^2}\mathrm{d}u$$

我们需要交换积分次序，所以引入收敛因子 $\mathrm{e}^{-vx},v\geqslant 0$，考虑积分 $I(v)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-vx}\mathrm{d}x$. 易见：

$$I(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\mathrm{d}u$$

任取 $\delta>0$，当 $v\geqslant\delta$ 时：

(1) $\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}$ 对 x 单调递减一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\mathrm{d}x$ 在 $u\geqslant 0$ 上一致收敛。

(2) $|\sin x|\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\mathrm{d}u\leqslant x\mathrm{e}^{-xu^2}\leqslant\frac{1}{1+xu^2}\leqslant\frac{1}{u^2}$，由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\mathrm{d}x$ 在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛。

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\left|\sin x\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+v}=\frac{\pi}{2\sqrt{v}}\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$

所以由定理知当 $v\geqslant\delta$ 时可以交换积分顺序，也即，$\forall v\geqslant\delta$：

$$I(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-x\left(u^2+v\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\left(u^2+v\right)^2}$$

由 Dirichlet 判别法知 $I(v)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，因此连续。由 $\delta>0$ 的任意性知 $\forall v>0,I(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\left(u^2+v\right)^2}$，所以：

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x\\=&\lim_{v\to 0^+}I(v)\\=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}\\=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}u+\frac{1}{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}u-\frac{1}{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2}-\frac{\sqrt{2}\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2}+\frac{1}{4\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2}-\frac{1}{4\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2}\right)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{\arctan\left(\sqrt{2}u+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}u-1\right)}{2\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

同理，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

1　确定下列参变量反常积分的收敛域

(1)　$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^u\mathrm{d}x$

解：因为 $\displaystyle\int x^u\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^{u+1}}{u+1}+C, & u\neq -1\\ \ln x+C, & u=-1\end{cases}$，所以收敛区域为 $\varnothing$.

(2)　$\displaystyle\int_1^{+\infty}x^u\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x$

解：

$$\int_1^{+\infty}x^u\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(x^u+\frac{2x^u\sin x}{x-\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

当 $u\geqslant -1$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty}x^u\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\int_2^{+\infty}\left(x^u-\frac{2x^u}{x-1}\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{x^u(x-3)}{x-1}\mathrm{d}x=+\infty$，发散.

当 $u<-1$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty}x^u\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x\leqslant\int_2^{+\infty}x^u\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x+\int_1^2 x^u\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 x^u\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x+\frac{3\times 2^{u-1}}{1-u}$，收敛.

因此收敛域为 $(-\infty,-1)$.

(3)　$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^u\ln x}$

解：当 $u>1$ 时，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^u\ln x}<\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^u}=\frac{2^{1-u}}{u-1}$，因此收敛。

当 $u\leqslant 1$ 时，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^u\ln x}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln x\big|_2^{+\infty}=+\infty$，则发散。

因此，收敛域为 $(1,+\infty)$.

(4)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^u x}$

解：$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^u x}=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^u\sqrt{1-t^2}}$，因为 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ 反常可积，所以只需考虑 $t\to 0^+$ 处 $\dfrac{1}{t^u\sqrt{1-t^2}}$ 的可积性，则只需考虑 $\dfrac{1}{t^u}$.

注意到：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{t^u}=\begin{cases}\ln t+C, & u=1\\ \dfrac{t^{1-u}}{1-u}+C, & u\neq 1\end{cases}$，因此收敛域为 $(-\infty,1)$.

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$

解：设 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x\triangleq I_1(\alpha)+I_2(\alpha)$.

因为 $\displaystyle\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\sim x^{2-\alpha}$，因此，$I_1(\alpha)$ 收敛当且仅当 $2-\alpha>-1$，也即 $\alpha<3$.

当 $\alpha>0$ 时，$I_2(\alpha)\leqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}<\frac{1}{\alpha}$，收敛。当 $\alpha\leqslant 0$ 时，$I_2(\alpha)\geqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x+1}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2(x+1)}\mathrm{d}x$. 因为 $\displaystyle\frac{1}{2(x+1)}$ 单调递减趋于 0，$\displaystyle\int_1^{A}\cos 2x\mathrm{d}x$ 对 $A\geqslant 1$ 有界，所以由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2(x+1)}\mathrm{d}x$ 收敛，但是 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2(x+1)}\mathrm{d}x=+\infty$，所以不收敛。

因此，收敛域为 $(0,3)$.

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}x^{\alpha-2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2$$

因为 $\forall k>0,\ln\left(1+x^2\right)=o\left(x^k\right)\ (x\to+\infty)$，所以 $\alpha>1$ 时，$\displaystyle\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}=\frac{o\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)}{x^\alpha}=o\left(x^{\frac{1-\alpha}{2}}\right)$，$I_2$ 收敛.

当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$I_2\geqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}\ln^2 x=+\infty$，$I_2$ 发散.

因为 $\displaystyle x^{\alpha-2}\ln\frac{1+x^2}{x^2}\sim x^{\alpha-4}\ (x\to+\infty)$，所以当 $\alpha\geqslant 3$ 时，I_1 发散. 当 $\alpha<3$ 时，I_1 收敛.

因此收敛域为 $(1,3)$.

2 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$-\infty<u<+\infty$.

解：因为：

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}\mathrm{d}x\right|=\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan A\to 0\quad(A\to+\infty)$$

所以一致收敛。

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$，(a) $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$；(b) $0<\alpha<+\infty$.

解：(a) 注意到，当 α,β 不全为零时有：

$$\int\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x=\frac{-\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{-\alpha x}+C$$

所以 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0}\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x\right|=\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0}\frac{|\alpha\sin\beta A+\beta\cos\beta A|}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{-\alpha A}\leqslant\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0}\mathrm{e}^{-\alpha A}=\lim_{A\to+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0 A}=0$，因此一致收敛。

解：(b) 因为 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha>0}\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x\right|=\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha>0}\frac{|\alpha\sin\beta A+\beta\cos\beta A|}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{-\alpha A}$,所以,当 $\beta=0$ 时，$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha>0}\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x\right|=0$，一致收敛；当 $\beta\neq 0$ 时，$\displaystyle\sup_{\alpha>0}\frac{|\alpha\sin\beta A+\beta\cos\beta A|}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{-\alpha A}\geqslant\frac{|\cos\beta A|}{\beta}$，但当 $A\to+\infty$ 时不存在极限，因此不一致收敛。

(3) $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$，$\alpha\geqslant 0$.

解：因为 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以当 $\alpha>0$ 时，$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$；
当 $\alpha=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=0$.

因为如果在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，则 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$ 是关于 α 的连续函数，但 $\alpha=0$ 是一个间断点，所以在 $[0,+\infty)$ 不一致连续。

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$，$1<\alpha<+\infty$

解：因为 $\sup\limits_{\alpha>1}\int_A^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\mathrm{d}x\geqslant 2\ln\ln x\big|_A^{+\infty}=+\infty$，所以不一致收敛.

(5) $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$，$\alpha\geqslant 0$; $p>0$ 为常数.

解：因为 $\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x^p}$ 对 $\forall\alpha\geqslant 0$ 严格递减，一致趋于 0；又 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 对 A 有界，因此由 Dirichlet 判别法知，一致收敛.

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\mathrm{d}x$，$0\leqslant p<+\infty$

解：因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\mathrm{d}t$. 因为 $\int_0^A\sin t\mathrm{d}t$ 对 $A\geqslant 0$ 有界，$\frac{1}{2\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}$ 单调递减，对于 $p\geqslant 0$ 一致趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

3 设 $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上连续，又对于 $[\alpha,\beta)$ 上的每一个 u，积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛，而当 $u=\beta$ 时 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散，试证积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上不一致收敛.

证明：反设在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛，因为 $[\alpha,\beta)$ 上积分一致收敛且 f 连续，所以可以交换无穷积分和极限的顺序，但是 $\lim\limits_{u\to\beta^-}\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{u\to\beta^-}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散，矛盾!

4 证明：$\varphi(u)=\int_u^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 是 $u>0$ 上的连续函数，虽然该积分在 $u\geqslant 0$ 上不一致收敛.

证明：

$$\varphi(u)=\int_u^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x=\int_{u^2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-u^2}\quad(u>0)$$

所以 $\varphi(u)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数。又因为 $\varphi(0)=0\neq\lim\limits_{u\to 0^+}\varphi(u)$，所以在 $[0,+\infty)$ 不一致连续。 □

6 证明 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 是连续可微的函数.

证明：因为 $|F(\alpha)|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+\alpha)^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\pi$，所以由 Weierstrass 判别法知：$F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

因为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}=\frac{-2(x+\alpha)\cos x}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}=o\left(x^{-2}\right)$ $(x\to+\infty)$，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 收敛。又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$ 连续。

所以 $F(\alpha)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的光滑函数。 □

7 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\mathrm{d}x$，$\alpha,\beta > -1$.

解：

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_\alpha^\beta x^t \mathrm{d}t$$

任取 $\delta > 0$，当 $\alpha,\beta \geqslant \delta - 1$ 时，$t \geqslant \delta - 1, \displaystyle\int_0^1 x^t \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{\delta-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}$，因此由 Weierstrass 判别法知一致收敛，可以交换积分顺序，所以：

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_\alpha^\beta x^t \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t \int_0^1 x^t \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(\beta+1) - \ln(\alpha+1)$$

由 δ 的任意性，知：

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln(\beta+1) - \ln(\alpha+1)$$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，$a > -1$.

解：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\left(x\int_0^a \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{e}^{-x(t+1)}\mathrm{d}t$$

任取 $\delta > 0$，当 $t \geqslant \delta - 1$ 时：由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(t+1)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}$，所以由 Weierstrass 判别法知一致收敛，因此可以交换积分顺序：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{e}^{-x(t+1)}\mathrm{d}t = \int_0^a \mathrm{d}t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(t+1)}\mathrm{d}x = \ln(a+1)$$

由 δ 的任意性，知：

$$\forall a > -1, \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \ln(a+1)$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x^2}\mathrm{d}x$，$a > 0$.

解：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t$$

任取 $\delta > 0$，当 $a \geqslant \delta$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}}$，所以由 Weierstrass 判别法知一致收敛，可以交换积分顺序。

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{d}t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{a}$$

由 δ 的任意性，知：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x^2}\mathrm{d}x = 2\sqrt{a}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x$，$\alpha,\beta>0.$

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-x^2t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta x\mathrm{e}^{-x^2t}\mathrm{d}t$$

任取 $\delta>0$，当 $t\geqslant\delta$ 时：$\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2t}\mathrm{d}x=\frac{1}{2t}\leqslant\frac{1}{2\delta}$，因此由 Weierstrass 判别法知一致收敛，可以交换积分顺序，所以：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta x\mathrm{e}^{-x^2t}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2t}\mathrm{d}x=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{2}$$

由于 $\delta>0$ 的任意性：

$$\forall\alpha,\beta>0,\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{2}$$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x.$

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\left(\int_0^a\frac{x}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2t^2\right)}\mathrm{d}t$$

因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2t^2\right)}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$，所以由 Weierstrass 判别法知一致收敛，可以交换积分顺序。

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2t^2\right)}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^a\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2t^2\right)}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^a\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2t^2}\mathrm{d}\arctan x\\
=&\int_0^a\mathrm{d}t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+t^2\tan^2u}\mathrm{d}u\\
=&\int_0^a\frac{\pi}{2(|t|+1)}\mathrm{d}t\\
=&\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\ln(1+a), & a\geqslant0\\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-a), & a<0\end{cases}
\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right)\mathrm{d}x$，$0<a<b.$

解：

$$\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{2t}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{x^2}}\mathrm{d}t$$

任取 $\delta>0$，当 $t\geqslant\delta$ 时，因为 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{2t}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{x^2}}=0$，所以 0 不是瑕点，又 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2t}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{x^2}}\mathrm{d}x<\int_1^{+\infty}\frac{2t}{x^2}\mathrm{d}x=2t$，所以由 Weierstrass 判别法知一致收敛，可以交换积分顺序。

$$\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{2t}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-t^2u^2}\mathrm{d}(tu)=\sqrt{\pi}(b-a)$$

由于 $\delta>0$ 的任意性：

$$\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}(b-a)$$

8 利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 以及 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x$，$\sigma>0$.

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-a+a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=a$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x$，$\sigma>0$.

解：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sigma}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\
=&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t^2\\
=&-\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\frac{t\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\
=&\sigma^2
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}\mathrm{d}x$，$a>0,b>0$.

解：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a+b)x+\sin(a-b)x}{2x}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)x}\mathrm{d}(a+b)x+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a-b)x}{2x}\mathrm{d}x\\
=&\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & a>b\\ \dfrac{\pi}{4}, & a=b\\ 0, & a<b\end{cases}
\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\cos x-1}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$n\in\mathbb{N}_+$.

解：设 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}$，于是：

$$
I_n=-\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\,\mathrm{e}^{-x^2}\frac{x^{2n-1}}{2}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n-2}\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x=\frac{2n-1}{2}I_{n-1}
$$

由 $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以：$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：

$$
\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8x^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{4-4\cos 2x}{8x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x-1}{8x^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-1}{2x^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{2x^2}\mathrm{d}x\\
=&\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

13.5　Euler 积分

定理 13.23: (1) $\Gamma(s)\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}t^{2s-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$；

(2) $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$

定理 13.24: 余元公式 设 $s\in(0,1)$，则 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

证明：

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s)=&\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1)}\\
=&B(s,1-s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{-s}}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{x^{-s}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{-s}}{1+x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因为 $s\in(0,1)$，所以在 $(0,1]$ 反常可积。因为 $s>0$，所以 $\dfrac{x^{-s}}{x+1}\sim x^{-1-s}\ (x\to+\infty)$，所以在 $[1,+\infty)$ 反常可积。因为 $\dfrac{x^{-s}}{x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n-s}$ 在 $[0,1)$ 内闭一致收敛，所以设 $\delta\in(0,1)$，则：

$$
\int_0^{1-\delta}\frac{x^{-s}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{1-\delta}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n-s}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{1-\delta}x^{n-s}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-\delta)^{n-s+1}}{n-s+1}
$$

因为由 Leibniz 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n-s+1}}{n-s+1}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛，所以 $(0,1)$ 的瑕积分收敛，也即：$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{-s}}{x+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-s+1}$. 代换 $x=\dfrac{1}{t}$，于是：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{-s}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^s}{1+\frac{1}{t}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_0^1\frac{t^{s-1}}{t+1}\mathrm{d}t$，同理可知，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{-s}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+s}$. 于是：

$$
\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+s}=\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n-s}+\frac{(-1)^n}{n+s}\right)=\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2s(-1)^n}{s^2-n^2}
$$

注意到：$\forall a\notin\mathbb{Z},\cos(ax)=\dfrac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\dfrac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{a^2-n^2}$，取 $x=0$，并代换 $x=a\pi$，得：$\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n x}{x^2-n^2\pi^2}$，于是：$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{1}{s}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2s(-1)^n}{s^2-n^2}=\dfrac{\pi}{\sin(s\pi)}$. □

定理 13.25: Euler-Gauss 公式

$$
\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},x\in(0,+\infty)
$$

证明：因为 $\mathrm{e}^{-t}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$，所以考虑证明 $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$. 也即证明：

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)t^{x-1}\mathrm{d}t
$$

因此我们需要给出一个关于 $\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ 的有关 n 的上界估计。

注意到：$\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}=0$，所以考虑当 $t\in[0,n]$ 时：

$$
\ln\left(\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)=t+n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{kn^k}\geqslant-\frac{t^2}{2n^2}\implies\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}^{-t}\frac{t^2}{2n^2}
$$

于是

$$
\int_0^n\left(\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)t^{x-1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^n\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2n^2}t^{x+1}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\Gamma(x+2)}{2n^2}\to0\ (n\to\infty)
$$

所以 $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$，代换 $t=ny$，于是：

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}n^x\int_0^1(1-y)^n y^{x-1}\mathrm{d}y&=\lim_{n\to\infty}n^x\left(\left.\frac{(1-y)^n y^x}{x}\right|_0^1+\frac{n}{x}\int_0^1(1-y)^{n-1}y^x\mathrm{d}y\right)\\
=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^1 y^{x+n-1}\mathrm{d}y&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}
\end{aligned}
$$

定理 13.26: Stirling 公式 (连续)

$$\Gamma(x)=\frac{\sqrt{2\pi x}}{x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^{x}\mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}},\theta(x)\in(0,1)$$

证明：两边取对数，$\iff\ \ln\Gamma(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{\theta(x)}{12x}$. 首先由 Euler-Gauss 公式：$\ln\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$。

注意到：$\displaystyle\int_0^n\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{k-1+x+t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(k-\frac{1}{2}+x\right)\ln\frac{k+x}{k-1+x}\right)-n$ $\displaystyle=\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+n)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-\sum_{k=1}^{n}\ln(x+k)-n$，所以：

$$\begin{aligned}&x\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln k-\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)-\int_0^n\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t\\=&x\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln k-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+n)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x+n-\ln x\\=&\ln n!+n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x\end{aligned}$$

由离散 Stirling 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}},\theta_n\in(0,1)\implies\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}}=\sqrt{2\pi}\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+n\right)=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=x$，由 Dirichlet 判别法知含参反常积分存在，所以令 $n\to\infty$：

$$\ln\Gamma(x)-\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln(2\pi)-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x$$

于是，我们下面只需证明 $0<\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t<\frac{1}{12x}$. 因为：

$$\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{n+x+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n+x}\right)-1\right)$$

要估计该值，注意到：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+x}=0$，所以我们考虑 $\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 的放缩。注意到：

$$x\in(-1,1),\ \ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(-1)^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\begin{aligned}\implies\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=&\frac{2x+1}{2}\ln\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\\=&\frac{2x+1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}},\quad x>0\\=&(2x+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,(2x+1)^{2n-1}}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2x+1)^{2n-2}}\end{aligned}$$

因此，$\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$，且：

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2n-2}}=1+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}}=1+\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}$$

所以：

$$0<\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n+x}\right)-1\right)<\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)=\frac{1}{12x}$$

因此，$\Gamma(x)=\dfrac{\sqrt{2\pi x}}{x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}}$, $\theta(x)\in(0,1)$. □

定理 13.27: Gamma 函数平移性质

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s)s^a}=1$$

1　证明

(1)　$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$s>0$.

证明：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\xlongequal{t=x^2}2\int_0^{+\infty}x^{2s-2}\mathrm{e}^{-x^2}x\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

(2)　$\Gamma(s)=a^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$，$a>0,a>0$.

证明：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\xlongequal{t=ax}\int_0^{+\infty}(ax)^{s-1}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}(ax)=a^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$$

2　证明：$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\mathrm{d}t$，$p>0,q>0$.

证明：

$$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}t\xlongequal{x=\sin^2 t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-2}t\cos^{2q-2}t\mathrm{d}\left(\sin^2 t\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\mathrm{d}t$$

3　利用 Euler 积分计算

(1)　$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$.

解：

$$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{\tau}}\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\sqrt{1-\tau}}{\sqrt{\tau}}\mathrm{d}\tau=\frac{B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}{4}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{4\Gamma(2)}=\frac{\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4}=\frac{\pi}{8}$$

(2)　$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解：当 $a\geqslant 0$ 时：

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\sqrt{t}}\frac{a^4}{2}\int_0^1\sqrt{t}\sqrt{1-t}\mathrm{d}t=\frac{a^4B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}{2}=\frac{a^4\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)}=\frac{a^4\pi}{16}$$

因为 $a<0$ 时符号相反，所以：$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\operatorname{sgn}(a)\dfrac{a^4\pi}{16}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x \mathrm{d}x.$

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma(6)} = \frac{5}{2}\frac{1}{240}\frac{9\pi}{16} = \frac{3\pi}{512}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}\mathrm{d}x$，$n,m,q>0.$

解：

$$\int_0^1 x^{n-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}\mathrm{d}x \xlongequal{x^m=t} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{m}}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{n}{m}-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \frac{B\left(\frac{n}{m},q\right)}{m}$$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\pi t}}$，$a>0.$

解：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\pi t}} \xlongequal{at=y} \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x\mathrm{d}x$，$|\alpha|<1.$

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x\mathrm{d}x \xlongequal{sinx=t} \int_0^1 \frac{t^\alpha}{(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}\arcsin t = \int_0^1 t^\alpha\left(1-t^2\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2}$$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

解：

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t^2}} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \xlongequal{y=\frac{t}{\sqrt{2}}} 4\sqrt{2}\int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

(8) $\displaystyle\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p\mathrm{d}x$，$0<p<1.$

解：

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} (b-a)\int_0^1 t^{-p}(1-t)^p\mathrm{d}t = (b-a)B\left(1-p,p+1\right)\\ =&(b-a)\frac{p\Gamma(1-p)\Gamma(p)}{\Gamma(2)} = \frac{(b-a)p\pi}{\sin(p\pi)}\end{aligned}$$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^2 (x-1)^2\sqrt[n]{\frac{2-x}{x-1}}\mathrm{d}x.$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_1^2 (x-1)^2\sqrt[n]{\frac{2-x}{x-1}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=1+t} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{2-\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} B\left(3-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3\Gamma(4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n-1)\pi}{6n^3\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x.$

解：由 Weierstrass 判别法知积分在 $n\in(1,+\infty)$ 内闭一致收敛。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\xlongequal{x^n=t}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{1}{t+1}=y}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 y^{-\frac{1}{n}}(1-y)^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{B\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}=1\end{aligned}$$

4 计算极限：$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\left(1-x^5\right)^{\alpha}\mathrm{d}x$

解：当 $\alpha>0$ 时，由 Stirling 公式：

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\left(1-x^5\right)^{\alpha}\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}B\left(\frac{1}{2},\alpha+1\right)}{5}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi\alpha}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{5\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}\\=&\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{5}\frac{\sqrt{2\pi(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12\alpha}}}{\sqrt{2\pi(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\xi}{12\alpha+6}}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{e}\pi}}{5}\left(1-\frac{1}{2\alpha+1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12\alpha}-\frac{\xi}{12\alpha+6}}\\=&\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{e}\pi}}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12\alpha}-\frac{\xi}{12\alpha+6}}\\=&\frac{\sqrt{\pi}}{5}\end{aligned}$$

5 设 $a>0$，试求由曲线 $x^n+y^n=a^n$ 和两坐标轴所围成的平面图形在第一象限的面积.

解：

$$S=\int_0^a\left(a^n-x^n\right)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=at}a^2\int_0^1\left(1-t^n\right)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t=\frac{a^2B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)}{n}$$

6 设 $0<\alpha<1$，证明：

(1) 对于 $x>0$ 有 $x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0$. 并由此推出下列不等式：$a^{\alpha}b^{1-\alpha}\leqslant\alpha a+(1-\alpha)b$，$a>0,b>0$.

证明：设 $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1$，$f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0,x>0$，又因为 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha,f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与 x 轴相切，且在 $(0,+\infty)$ 上严格凹，因此 $f(x)\leqslant 0$，也即 $x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时取等。 □

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}-\alpha\frac{a}{b}+\alpha-1\leqslant 0\iff a^{\alpha}b^{1-\alpha}\leqslant\alpha a+(1-\alpha)b,\quad\text{当且仅当 } a=b \text{ 时取等}$$

(2) 设 $x_i\geqslant 0,y_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$，则有 Holder 不等式：

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n y_i^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$$

证明：不妨仅考虑 x_i 不全为零且 y_i 不全为零的情况。

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n y_i^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\iff\sum_{j=1}^n\left(\frac{x_j^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\left(\frac{y_j^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}\leqslant 1$$

由于 $a^\alpha b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b$，所以：

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\left(\frac{y_j^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha x_j^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{(1-\alpha) y_j^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)=\alpha+(1-\alpha)=1$$

因此原不等式得证. □

(3) 设 $f \geqslant 0, g \geqslant 0$，且连续，利用 Holder 不等式，通过 Riemann 和取极限的方式证明积分形式的 Holder 不等式：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f^{\frac{1}{\alpha}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\left(\int_a^b g^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha} \tag{1}$$

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^{\infty} f^{\frac{1}{\alpha}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\left(\int_a^{\infty} g^{\frac{1}{1\alpha}}(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha} \tag{2}$$

这里均假设所涉及的反常积分是收敛的.

证明：(1) 我们只需考虑 $f(x), g(x)$ 都不恒为 0 的情况，由于连续，所以这种情况下积分非零。只需证：

$$\int_a^b \left(\frac{f^{\frac{1}{\alpha}}(x)}{\int_a^b f^{\frac{1}{\alpha}}(x)\mathrm{d}x}\right)^{\alpha}\left(\frac{g^{\frac{1}{1-\alpha}(x)}}{\int_a^b g^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)\mathrm{d}x}\right)^{1-\alpha}\mathrm{d}x \leqslant 1$$

设 $F(x)=\dfrac{f^{\frac{1}{\alpha}}(x)}{\int_a^b f^{\frac{1}{\alpha}}(x)\mathrm{d}x}, G(x)=\dfrac{g^{\frac{1}{1-\alpha}(x)}}{\int_a^b g^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)\mathrm{d}x}$，于是 $F(x), G(x)$ 连续、可积、非负，且 $\displaystyle\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b G(x)\mathrm{d}x = 1$. 只需证：$\displaystyle\int_a^b F^{\alpha}(x)G^{1-\alpha}(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$ 即可。任取 $[a,b]$ 的分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，于是：

$$\forall k=1,2,\cdots,n, \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], F^{\alpha}(\xi_k)G^{1-\alpha}(\xi_k) \leqslant \alpha F(\xi_k) + (1-\alpha)G(\xi_k)$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} F^{\alpha}(\xi_k)G^{1-\alpha}(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \alpha\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{n} G(\xi_k)\Delta x_k$$

因为 $F(x), G(x), F^{\alpha}(x), G^{1-\alpha}(x)$ 可积，所以令 $\|T\| \to 0^+$，即得：

$$\int_a^b F^{\alpha}(x)G^{1-\alpha}(x)\mathrm{d}x \leqslant \alpha\int_a^b F(x)\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_a^b G(x)\mathrm{d}x = 1$$

于是原不等式证毕. □

证明：(2) 设 $F(x)=\dfrac{f^{\frac{1}{\alpha}}(x)}{\int_a^{\infty} f^{\frac{1}{\alpha}}(x)\mathrm{d}x}, G(x)=\dfrac{g^{\frac{1}{1-\alpha}(x)}}{\int_a^{\infty} g^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)\mathrm{d}x}$，于是 $F(x), G(x)$ 连续、可积、非负，由 (1) 知，在任意闭区间 $[a,b]$，有：

$$\int_a^b F^{\alpha}(x)G^{1-\alpha}(x)\mathrm{d}x \leqslant \alpha\int_a^b F(x)\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_a^b G(x)\mathrm{d}x$$

令 $b \to \infty$，则：

$$\int_a^{\infty} F^{\alpha}(x)G^{1-\alpha}(x)\mathrm{d}x \leqslant \alpha\int_a^{\infty} F(x)\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_a^{\infty} G(x)\mathrm{d}x = 1$$

于是：

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^{\infty} f^{\frac{1}{\alpha}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\left(\int_a^{\infty} g^{\frac{1}{1\alpha}}(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha}$$

(4) 证明 $\ln\Gamma(x)$ 是凸函数.

证明：因为 $\Gamma(x)>0, x>0$，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-\Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$，所以只需证：$\Gamma''(x)\Gamma(x)-\Gamma'^2(x)\geqslant 0$.

$$\iff \sqrt{\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln^2 t\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}\geqslant\left|\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t\right|$$

取 $f(y)=y^{\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}|\ln y|, g(y)=y^{\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，于是 f,g 对于 $x>0$，在 $(0,+\infty)$ 可积。取 $\alpha=2$，由 Holder 不等式：

$$\sqrt{\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln^2 t\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}\geqslant\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}|\ln t|\mathrm{d}t\geqslant\left|\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t\right|$$

因此 $\ln\Gamma(x)$ 是凸函数. □

第 13 章综合习题

1　设函数 $f(x)\geqslant 0$ 并在 $[a,+\infty)$ 的任何有限子区间上可积，数列 $\{a_n\}^\infty$ 单调递增并且 $a_0=a, a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$. 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 l 当且仅当级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 l.

解：对于任意的满足 $a_0=a, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ 的单调递增数列 $\{a_n\}^\infty$，因为 $f(x)\geqslant 0$，所以：

$$\forall A>a, \exists N\in\mathbb{N}_+, a_N\leqslant A\leqslant a_{N+1}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{N}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a_N}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{A}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{a_{N+1}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N+1}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant l$$

因此，当 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=l$ 时，由夹逼定理知 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)\mathrm{d}x=l$；当 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)\mathrm{d}x=l$ 时，由夹逼定理知：$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=l$. □

2　证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛，但是被积函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负、连续、无界，不收敛到 0.

证明：因为 $\forall n\in\mathbb{N}, \lim\limits_{x\to n\pi}f(x)=n\pi$，因此非负、无界、连续。取数列 $\{a_n\}^\infty: a_n=\dfrac{2n-1}{2}\pi, n\in\mathbb{N}_+, a_0=0$，于是 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，单增。因为 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$，所以，当 $n\in\mathbb{N}_+$ 时：

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}&=\int_{\frac{2b-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{n\pi-x}{1+(n\pi-x)^6\sin^2 x}+\frac{n\pi+x}{1+(n\pi+x)^6\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x\\&<\pi^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{n\pi+x}{\pi^2+4(n\pi+x)^6x^2}\mathrm{d}x\\&<16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{n\pi+x}{16+(2n-1)^6\pi^4x^2}\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{4n}{(2n-1)^3\pi}\arctan\frac{(2n-1)^3\pi^2x}{4}+\frac{8}{(2n-1)^6\pi^4}\ln\left(x^2+\frac{16}{(2n-1)^6\pi^4}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$=\frac{8n}{(2n-1)^3\pi}\arctan\frac{(2n-1)^3\pi^3}{8}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}<\frac{\pi^2}{8}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{n\arctan\frac{(2n-1)^3\pi^3}{8}}{(2n-1)^3}<\frac{\pi^2}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(2n-1)^3}$$

由 Weierstrass 判别法以及上题结论，积分收敛. □

3 设 $\varphi(x)$ 有二阶导数，$\psi(s)$ 有一阶导数，证明：$u(x,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$ 满足弦振动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证明：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a\varphi'(x+at)-a\varphi'(x-at)}{2}+\frac{\psi(x+at)+\psi(x-at)}{2}\right)\\=&\frac{a^2}{2}\left(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right)+\frac{a}{2}\left(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)}{2}+\frac{\psi(x+at)-\psi(x-at)}{2a}\right)\\=&\frac{\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)}{2}+\frac{\psi'(x+at)-\psi'(x-at)}{2a}\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. □

4 证明：n 阶 Bessel 函数 $J_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ 满足 Bessel 方程 $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=0$.

证明：

$$J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

因为：

$$\begin{aligned}&n^2\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\=&n\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}(n\varphi-x\sin\varphi+x\sin\varphi)\\=&n\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}(n\varphi-x\sin\varphi)+n\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}(x\sin\varphi)\\=&n\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\Big|_0^{-\pi}+nx\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\=&x\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}(n\varphi-x\sin\varphi+x\sin\varphi)\\=&x\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}(n\varphi-x\sin\varphi)+x^2\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\=&x\int_0^{-\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)+x^2\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\=&x\cos\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\Big|_0^{-\pi}+x\int_0^{-\pi}\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+x^2\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\=&x\int_0^{-\pi}\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+x^2\int_0^{-\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned}&\pi\left(x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)\right)\\=&\int_0^{-\pi}\left(x^2\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos^2\varphi+x\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi-n^2\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi\\=&0\end{aligned}$$

5 证明：对于任意实数 u，有：$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos\left(u\sin x\right)\mathrm{d}x=1.$

证明：因为 $u=0$ 时积分为 1，所以只需证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}I(u)=0$. 当 $u\neq 0$ 时：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos\left(u\sin x\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos\left(x+u\sin x\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\cos(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\sin(u\sin x)\sin(x)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{u}\mathrm{e}^{u\cos x}\mathrm{d}\sin(u\sin x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\sin(u\sin x)\sin(x)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2\pi}\left.\frac{\mathrm{e}^{u\cos x}}{u}\sin(u\sin x)\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(u\sin x)\mathrm{e}^{u\cos x}\sin x\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\sin(u\sin x)\sin(x)\mathrm{d}x\\=&0\end{aligned}$$

当 $u=0$ 时，同样，$I'(0)=0$. 因此 $I(u)=1$. □

证明：注意到：$I(0)=1,I'(u)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(x+u\sin x)\mathrm{d}x$，设 $\begin{cases}y(x)=u\cos x\\z(x)=u\sin x\end{cases}$，于是：

$$\begin{aligned}I'(u)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\left(\cos x\cos(u\sin x)-\sin x\sin(u\sin x)\right)\mathrm{d}x\\=&\end{aligned}$$

6 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明：因为 $\left|\displaystyle\int_1^A\sin 3x\mathrm{d}x\right|<\dfrac{2}{3}$，$0<\mathrm{d}frac\mathrm{e}^{-ux}x+u\leqslant\dfrac{1}{x}$，单调递减一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 一致收敛.

因为 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{x+u}=\begin{cases}0, & u>0\\3, & u=0\end{cases}$，所以 $x=0$ 不是瑕点，因此 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 一致收敛。

综上，积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

7 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$ 关于 u 在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛，但在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明：当 $u\geqslant\delta$ 时，$\left|\displaystyle\int_0^A\cos ux\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{u}\leqslant\dfrac{1}{\delta}$，$\dfrac{x}{x^2+a^2}$ 单调递减一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

反设在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，那么设 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \rightrightarrows S(u), u>0$，则 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续。由 Cauchy 收敛准则：

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall B>A>X,\left|\int_A^B\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

因为 $\dfrac{x\cos ux}{x^2+a^2}$ 连续，所以：

$$\lim_{u\to0^+}\left|\int_A^B\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_A^B\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon<\varepsilon$$

因此：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 收敛，但是因为 $\dfrac{x}{x^2+a^2}\sim\dfrac{1}{x}\ (x\to+\infty)$，矛盾！所以在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛. □

8 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$ 关于 u 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛。

证明：反设 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 在 $u\in(0,+\infty)$ 一致收敛，由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 在 $u=0$ 时收敛，那么在 $[0,+\infty)$ 一致收敛。因为 $\dfrac{x\sin ux}{x^2+a^2}$ 连续，所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 连续。但是由 Laplace 积分知：当 $u>0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-au}$，则 $\displaystyle\lim_{u\to0^+}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\neq0=\left.\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right|_{u=0}$，矛盾！所以不一致连续. □

9 设 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，证明：函数 $\varphi(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明：由 Weierstrass 判别法，因为 $\left|\displaystyle\int_A^B f(x)\cos ux\mathrm{d}x\right|\leqslant\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$，所以 $\varphi(u)$ 对 $u\in\mathbb{R}$ 一致收敛。因此：

$$\varphi(u)-\varphi(u_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\cos ux-\cos u_0x\right)\mathrm{d}x=2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x$$

因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法知，$\varphi(u)-\varphi(u_0)$ 对于 $\forall u,u_0\in\mathbb{R}$ 一致收敛。因此：$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall A>M,\forall u,u_0\in\mathbb{R}$：

$$\left|\int_{-\infty}^{-A}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad\left|\int_A^{+\infty}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

此时，任取 $K>\displaystyle\int_{-A}^{A}|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant0$，对于 $\forall u_0\in\mathbb{R}$，当 $|u-u_0|<\dfrac{2\varepsilon}{KA}$ 时，因为 $\displaystyle\max_{x\in[-A,A]}\left|\sin\frac{u-u_0}{2}x\right|<\frac{\varepsilon}{K}$，所以：

$$\left|\int_{-A}^{A}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{K}\left|\int_{-A}^{A}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

因此：

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\leqslant\left|\int_{-\infty}^{-A}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x\right|$$
$$+\left|\int_{-A}^{A}f(x)\sin\frac{u+u_0}{2}x\sin\frac{u_0-u}{2}x\mathrm{d}x\right|<3\varepsilon$$

所以 $\varphi(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 一致连续. □

10　证明：函数 $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1)$ 上连续.

证明：我们只需证明其在 $[0,1)$ 内闭一致连续。任取 $\delta\in(0,1)$，考虑 $x\in[0,\delta]$. 易知 $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\geqslant 0$，考虑 $\{a_n\}^\infty: a_n=n\pi, n\in\mathbb{N}$. 因为 $\frac{1}{|\sin t|^x}\leqslant\frac{1}{|\sin t|^\delta}\sim\frac{1}{|t|^\delta}$ $(t\to 0)$，所以 $\int_0^\pi\frac{1}{|\sin t|^x}\mathrm{d}t$ 收敛。设 $\int_0^\pi\frac{1}{|\sin t|^x}\mathrm{d}t=M>0$，由积分第一中值公式：$\int_{a_{n-1}}^{a_n}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\mathrm{d}x<M\mathrm{e}^{-a_n}=M\mathrm{e}^{-n\pi}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{M}{\mathrm{e}^\pi-1}$，所以由第 1 题结论知积分在 $[0,\delta]$ 一致收敛，即在 $[0,1)$ 内闭一致收敛，所以在 $[0,1)$ 连续. □

11　证明：$\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2\pi}$.

证明：由余元公式：

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac12}\ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac12}\ln\frac{\pi}{\sin x\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln\pi}{2}-\int_0^{\frac12}\ln\sin x\pi\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\sin 2x-\ln 2\right)\mathrm{d}x=\frac14\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\ln 2$，所以：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$，因此：

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln\pi}{2}+\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2\pi}$$

12　证明：$\int_0^1\sin(\pi x)\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2}+1\right)$.

证明：由余元公式：

$$\begin{aligned}\int_0^1\sin(\pi x)\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac12}\sin(\pi x)\ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\frac{\pi}{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\ln\pi-\ln\sin x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln\pi}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln\pi}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x)\\&=\frac{\ln\pi}{\pi}-\frac{\ln\sin x(1-\cos x)}{\pi}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\cos^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln\pi}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot x\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln\pi+1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\ln\pi+1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\ln\pi+1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2}+1\right)
\end{aligned}
$$

13　证明：$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

证明：由余元公式：

$$
\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}}\xlongequal{t=\sin\frac{x}{2}}\sqrt{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}
$$

$$
\xlongequal{t=\sqrt[4]{y}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 y^{-\frac{3}{4}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\frac{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}\pi}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)
$$

14　设 $\varphi(t)$ 是 $(0,+\infty)$ 上正严格递减的连续函数，且 $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=+\infty,\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=1$，设 $\psi(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的反函数，求证：存在 $p\in(0,1)$ 使得 $\displaystyle\int_0^p\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_0^p\psi(t)\mathrm{d}t=1+p^2$.

证明：易知 $\psi(x)$ 单减恒正，$\displaystyle\lim_{t\to0^+}\psi(t)=+\infty$. 即证明：$\displaystyle\exists p\in(0,1),\int_{\varphi(p)}^p\varphi(t)\mathrm{d}t+p\psi(p)=p^2$.

因为 $\varphi(1)<1$，否则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t>\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t>1$，矛盾！所以 $\psi(1)<1$. 因为 $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=+\infty$，所以由中值定理知：存在唯一的 $p\in(0,1):\varphi(p)=p=\psi(p)$，此 p 即满足上式.　□

第十四章　测试题

14.1　测试 1

1　求 $f(x,y)=x^2e^y+\arctan\dfrac{y}{x}$ 的一阶偏导数. (18 分)

解：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xe^y-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=x^2e^y+\frac{x}{x^2+y^2}$$

2　设隐函数 $y=y(x),z=z(x)$ 满足 $\begin{cases}x^2+y^2-z=0\\x^2+y^2+3z^2=10\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. (18 分)

解：取微分得:

$$\begin{cases}\left(2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=0\\\left(2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{pmatrix}2y&-1\\2y&6z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x\mathrm{d}x\\-2x\mathrm{d}x\end{pmatrix}$$

$$\implies\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3z}{6yz+y}&\dfrac{1}{12yz+2y}\\\dfrac{-y}{6yz+y}&\dfrac{y}{6yz+y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2x\mathrm{d}x\\-2x\mathrm{d}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{x}{y}\mathrm{d}x\\0\end{pmatrix},z\neq-\frac{1}{6}$$

3　设 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y+25$，求 f 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 25\}$ 上的最大值和最小值. (18 分)

解：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-12,\frac{\partial f}{\partial y}=2y+16$$

驻点方程 $\begin{cases}2x-12=0\\2y+16=0\end{cases}$ 解得唯一驻点 $P_0(6,-8)\notin D$。又因为 f 是闭区域 D 上的连续函数，因此可以取到最大值和最小值，又由于内部无驻点，则在 ∂D 取最值。由 Lagrange 乘数法:

$$\begin{cases}2x-12=2\lambda x\\2y+16=2\lambda y\\x^2+y^2=25\end{cases}\implies\begin{cases}x=-3\\y=4\end{cases},\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}$$

因为在闭集 ∂D 上连续函数 $f(x,y)$ 可以取到最大、最小值，且 $f(-3,4)=150,f(3,-4)=-50$，因此最大值为 150，最小值 -50.

4 (18 分) 已知函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(1,1)$ 附近有二阶连续的偏导数，且满足

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{f(x,y)-x^2+2xy+3y-2}{(x-1)^2+(y-1)^2}=0$$

(1) 求 $f(1,1)$, $\mathrm{d}f|_{(1,1)}$.
(2) 求 f 在 $P_0(1,1)$ 附近的二阶 Taylor 展开式.

解：(1) 设 $x=1+h, y=1+k, \rho=\sqrt{h^2+k^2}$，则：$f(1+h,1+k)=-2-5k+h^2-2hk+o(\rho^2)$

$$f(1,1)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}(-2-5k+h^2-2hk+o(\rho^2))=-2$$

$$\mathrm{d}f|_{(1,1)}=-5\mathrm{d}k=-5\mathrm{d}y$$

解：(2) 由一阶微分形式不变性：

$$\mathrm{d}f|_{(1,1)}=-5\mathrm{d}y \iff \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}=-5$$

$$\implies f(1+h,1+k)=-2-5k+h^2-2hk+o(\rho^2)$$

对 h,k 分别求导得：

$$f'_x(1+h,1+k)=2h-2k+o(\rho), f'_y(1+h,1+k)=-5-2h+o(\rho)$$

对 h,k 求导得：

$$f''_{xy}(1+h,1+k)=-2+o(1), f''_{xx}(1+h,1+k)=2+o(1), f''_{yy}(1+h,1+k)=o(1), (h,k)\to 0$$

由连续性：$f''_{xx}(1,1)=2, f''_{yy}(1,1)=0, f''_{xy}(1,1)=f''_{yx}(1,1)=-2$
则 Taylor 展开式：$f(x,y)=-2-5(y-1)+(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)$

5 设 $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$，且在 $P_0(x_0,y_0)$ 附近满足 $f(x_0+h,y_0+k)=a_0+a_1h+a_2k+a_{11}h^2+2a_{12}hk+a_{22}k^2+o(h^2+k^2)$，求 $a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22}$. (18 分)

解：令 $h=k=0$，得：$a_0=f(P_0)$
令 $k=0$：$f(x_0+h,y_0)=f(x_0,y_0)+a_1h+a_{11}h^2+o(h^2)$，对 h 求导得：

$$f'_x(x_0+h,y_0)=a_1+2a_{11}h+o(h), f''_{xx}=2a_{11}+o(1)$$

$$\implies f'_x(P_0)=a_1, f''_{xx}(P_0)=2a_{11}$$

同理：

$$f'_y(P_0)=a_2, f''_{yy}(P_0)=2a_{22}$$

先对 h 求导，再对 k 求导得：

$$f'_x(x_0+h,y_0+k)=a_1+2a_{11}+2a_{12}k+o(\rho), f''_{xy}(x_0+h,y_0+k)=2a_{12}+o(1), (h,k)\to(0,0)$$

则 $a_0=f(P_0), a_1=f'_x(P_0), a_2=f'_y(P_0), a_{11}=f''_{xx}P_0, a_{12}=f''_{xy}(P_0), a_{22}=f''_{yy}(P_0)$

6 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$，且 $P \neq (0,0)$ 时，$\nabla f(P) \neq 0$. 若 f 满足 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \forall (x,y)$，求 f 的任意等值线方程. (10 分)

解：

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \forall (x,y) \implies (y,-x)\cdot\nabla f = 0$$

对于 f 的任意等值线 $f(x,y) = C$，求微分得：

$$0 = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \nabla f \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

因此 $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ 与 $(y,-x)$ 共线，即 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \iff \mathrm{d}(x^2+y^2) = 0$

则等值线方程：$x^2 + y^2 = D, D \geqslant 0$

14.2　测试 2

1 设 $D = \{(u,v) | u \geqslant 0, v \geqslant 0\}$，求：$\displaystyle\iint_D e^{-u^2-v^2-2uv\cos\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \alpha \in [0,\pi]$.

解：注意到：$u^2+v^2+2uv\cos\alpha = (u+v\cos\alpha)^2 + (v\,|\sin\alpha|)^2$，不妨设 $\sin\alpha \geq 0, \alpha \in [0,\pi]$.

设变换 $\begin{cases} x = u + v\cos\alpha \\ y = v\sin\alpha \end{cases}$，$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \frac{1}{|\sin\alpha|} = \frac{1}{\sin\alpha}, (x,y) \in \{(x,y) | y \geqslant 0, x \geqslant y\cot\alpha\}$，由于结论 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以：

$$\iint_D e^{-u^2-v^2-2uv\cos\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{y\cot\alpha}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\frac{1}{\sin\alpha}\mathrm{d}x$$

设变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r, r \geqslant 0$，由 $\alpha \in (0,\pi), r\cos\theta \geqslant r\sin\theta\cot\alpha = r\sin\theta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, y \geqslant 0$ 得 $\sin(\alpha-\theta) \geqslant 0, \sin\theta \geqslant 0$，因此取 $\theta \in [0,\alpha]$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{y\cot\alpha}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\frac{1}{\sin\alpha}\mathrm{d}x \\
=&\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\frac{1}{\sin\alpha}r\mathrm{d}r \\
=&\frac{\alpha}{2\sin\alpha}
\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\iint_D e^{-u^2-v^2-2uv\cos\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

2 设 $S = \{(x,y,z) | x+y+z = 1, x,y,z \geqslant 0\}$，求 $\displaystyle\iint_S xyz\mathrm{d}S$.

解：$\boldsymbol{r} = (x, y, 1-x-y), \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{3}$，因此：

$$\begin{aligned}
\iint_S xyz\mathrm{d}S &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} xy(1-x-y)\sqrt{3}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{6}(1-y)^3 y\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{3}}{120}
\end{aligned}$$

3 设 $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$，且 $|\nabla f|^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \equiv 1$

(1) 求证：$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2, |f(P)-f(Q)| \leqslant |PQ|$.

证明：

$$
\begin{aligned}
& |f(P)-f(Q)| \\
= & \left|\int_Q^P \nabla f \cdot \frac{\overrightarrow{QP}}{|QP|} \mathrm{d} s\right| \\
\leqslant & \left|\int_Q^P |\nabla f|\left|\frac{\overrightarrow{QP}}{|QP|}\right| \mathrm{d} s\right| \\
= & |PQ|
\end{aligned}
$$

由于 $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$，所以取等当且仅当 $\forall X \in PQ, \nabla f(X) \parallel \overrightarrow{PQ}$

(2) 设光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}, t \in [a, b]$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\nabla f|_{\boldsymbol{r}(t)}$，求证：$\boldsymbol{r}(t)$ 为直线段.

证明：$\forall a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$，由于 $|\boldsymbol{r}(t)| \equiv 1$：

$$
|f(\boldsymbol{r}(\beta))-f(\boldsymbol{r}(\alpha))|=\beta-\alpha \geqslant |\boldsymbol{r}(\beta)-\boldsymbol{r}(\alpha)|
$$

又由 (1) 知道 $|f(\boldsymbol{r}(\beta))-f(\boldsymbol{r}(\alpha))|=\beta-\alpha \leqslant |\boldsymbol{r}(\beta)-\boldsymbol{r}(\alpha)|$，因此 $|f(\boldsymbol{r}(\beta))-f(\boldsymbol{r}(\alpha))|=\beta-\alpha=|\boldsymbol{r}(\beta)-\boldsymbol{r}(\alpha)|$，取等时在 $[\alpha, \beta]$ 上 $\boldsymbol{r}(t)$ 是直线段，因此 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是直线段.

14.3 测试 3

1 求积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$.

解：

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \mathrm{d}x \\
= & \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2 求曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy,\ x, y \geqslant 0$ 的面积.

解：设变换 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$，$r \geqslant 0, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, \pi]$. 由 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 解得 $r=\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$，于是 $\boldsymbol{r}=\sin^2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin^2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{j}, \sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right|\\
=&\left|\left(\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\boldsymbol{k}\right)\right.\\
&\left.\times\left(\frac{\sin^2\theta\cos 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\boldsymbol{i}+\frac{\sin^2\theta\sin 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\boldsymbol{j}+\sin\theta\cos\theta\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\boldsymbol{k}\right)\right|\\
=&\left|\sin^2\theta\sin\varphi(2\sin^2\theta\cos\varphi-\cos 2\theta)\boldsymbol{i}-\sin^2\theta\cos\varphi(2\sin^2\theta\cos\varphi+\cos 2\theta\boldsymbol{j}+2\cos\theta\sin^3\theta\sin 2\varphi\boldsymbol{k})\right|\\
=&\sqrt{\sin^4\theta}\\
=&\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\sigma(S)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{4}
$$

3 设 D 是平面有界区域，$\partial D=L$ 是光滑曲线，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 的单位外法向，$\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}\in C^1\left(\overline{D}\right)$，证明：$\displaystyle\oint_{\partial D}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明：设单位切向量 $\tau=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$，于是 $\boldsymbol{n}=\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j}$，由 Green 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\partial D}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\\
=&\oint_{\partial D}P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x\\
=&\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

14.4 测试 4

3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域 (不一定单连通)，$\partial\Omega$ 是光滑曲面 (可以分片)。设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 中的二阶光滑向量场，满足：$\nabla\times\boldsymbol{v}_1=\nabla\times\boldsymbol{v}_2,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1\big|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_2\big|_{\partial\Omega}$，求证：$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$.

引理 14.1: $\mathbb{R}^3$ 上的调和函数的平均值原理。(证明略)

引理 14.2: $\mathbb{R}^3$ 上的调和函数的最值原理。(证明略)

证明：设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 是 $\overline{\Omega}$ 上的二阶光滑函数，于是 $\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0}$，只需证：$\boldsymbol{v}\big|_{\overline{\Omega}}=0$.

$$
\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\iff\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\quad\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\iff\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0
$$

为了证明 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，由调和函数的最值原理，只需要证明 P,Q,R 都是调和函数，我们下面只证明 P 是调和函数，Q,R 同理。

在 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$ 中对 x 求导，在 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 中对 y 求导，在 $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$ 中对 z 求导，得：

$$
0=\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2Q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2R}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2Q}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2P}{\partial y^2},\frac{\partial^2R}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2P}{\partial z^2}
$$

由于二阶光滑，所以 P,Q,R 的二阶偏导可交换次序，将上述 3 式联立即得：

$$
0=\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2P}{\partial z^2}=\Delta P
$$

因此成立. □

14.5　测试 5

1　求 $f(x)=|x|, x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数.

解：因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2\left((-1)^n-1\right)}{\pi n}, & n\in\mathbb{N}_+\\ \pi, & n=0\end{cases}$$

因此 $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$. 又因为 $f\left(\pi^-\right)=f\left(-\pi^+\right)$，所以：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

2　求和 $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, x\in[-\pi,\pi]$.

解：注意到：$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, x\in[-\pi,\pi]$. 因此 $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}-|x|, x\in[-\pi,\pi]$. 所以：

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}=\int_0^x\left(\frac{\pi}{2}-|t|\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}x-\frac{x|x|}{2}, x\in[-\pi,\pi]$$

3　设 $\{b_n\}^{\infty}$ 是单调的实数列，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$.

证明：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\rightrightarrows f(x), x\in[-\pi,\pi]$，于是 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续，可积。不妨设 $\{b_n\}^{\infty}$ 单调递减，我们先证明：$\{b_n\}^{\infty}$ 非负。

反设 $\exists N\in\mathbb{N}_+, b_N<0$，则 $\forall n\geqslant N, b_n\leqslant b_N<0$. 由 Parseval 等式：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$. 但 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}b_n^2=+\infty$，矛盾！因此 $\{b_n\}^{\infty}$ 非负。

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛，由 Cauchy 收敛准则：

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall m>n>N,\forall x\in[-\pi,\pi],\left|\sum_{k=n}^{m}b_n\sin kx\right|<\varepsilon$$

为了证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$，由于单调性，我们只需要证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的收敛性。因此我们取 $m>2N, n=\left[\frac{m}{2}+1\right]>\frac{m}{2}>N$，取 $x=\frac{\pi}{2m}$，于是有：$\forall k=n,n+1,\cdots,m$, $k\frac{\pi}{2m}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}],\sin\frac{k\pi}{2m}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$. 又因为 $b_n\geqslant 0$，所以：

$$\varepsilon>\sum_{k=n}^{m}b_n\sin\frac{k\pi}{2m}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=n}^{m}b_n\geqslant\frac{m-n+1}{\sqrt{2}}b_m>\frac{m-2}{2\sqrt{2}}b_m>0$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$. □

14.6　测试 6

1　求积分 $I=\int_1^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{t(2-t)}\mathrm{d}t$.

解：

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{t(2-t)}\mathrm{d}t \xlongequal{x=t-1} & \int_0^{+\infty}(x+1)^2\mathrm{e}^{1-x^2}\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}\int_0^{+\infty}\left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{e}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\
&=-\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\
&=\mathrm{e}+\frac{3\mathrm{e}\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}
$$

2 设 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x, t\in(0,+\infty)$，求证：

(1) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

证明：任取 $\delta>0$，当 $t\geqslant\delta$ 时，因为 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 单调递减一致趋于 0，$\left|\displaystyle\int_0^A\sin(tx)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{\delta}$，所以一致有界。由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛，也即在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛，因此在 $(0,+\infty)$ 连续. □

证明：因为 $\left|\dfrac{\sin(tx)}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$，所以由 Weierstrass 判别法知，$F(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。 □

(2) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导.

证明：考虑积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

任取 $\delta>0$，当 $t\geqslant\delta$ 时，因为 $\dfrac{x}{1+x^2}$ 单调递减一致趋于 0，$\left|\displaystyle\int_0^A\cos(tx)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{t}\leqslant\dfrac{2}{\delta}$，所以一致有界。由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛。因此，$\forall\beta\geqslant\alpha\geqslant\delta$：

$$
\int_\alpha^\beta\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta\frac{x\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t\beta)-\sin(t\alpha)}{1+x^2}\mathrm{d}x=F(\beta)-F(\alpha)
$$

也即 $F'(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$. 由 $\delta>0$ 的任意性，知 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导. □

(3) 考虑有限积分的极限。

$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导，且满足方程 $F''(t)-F(t)=-\dfrac{1}{t}$.

证明：$\forall\delta>0,\forall a,b>0\geqslant\delta>0$，因为 $F'(t)$ 在 $t>0$ 时收敛，$F(t)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛，所以：

$$
F'(b)-F'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x\left(\cos(bx)-\cos(ax)\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{-x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_a^b\sin(xt)\mathrm{d}t
$$

$$
=-\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\sin(xt)\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_a^b\sin(xt)\mathrm{d}t
$$

$$
=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x+\int_a^bF(t)\mathrm{d}t
$$

因为 $\frac{1}{x}$ 单调递减一致趋于 0，$\left|\int_0^A (\cos(ax)-\cos(bx))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a}+\frac{2}{b} \leqslant \frac{4}{\delta}$，一致有界，所以由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛。

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x &= -\int_0^A \mathrm{d}x\int_a^b \sin(xt)\mathrm{d}t\\
&= -\int_a^b \mathrm{d}t\int_0^A \sin(tx)\mathrm{d}x\\
&= -\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_a^b \frac{\cos(At)}{t}\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \frac{\cos(At)}{t}\mathrm{d}t-\ln b+\ln a
\end{aligned}$$

由 Riemann 引理，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^b \frac{\cos(At)}{t}\mathrm{d}t=0$，所以：

$$F'(b)-F'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x+\int_a^b F(t)\mathrm{d}t=-\ln b+\ln a+\int_a^b F(t)\mathrm{d}t$$

上式两端同时对 b 求导，得：

$$F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$$

证明：使用分部积分法。

$$\begin{aligned}
F'(t)=&\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}\sin(tx)\\
=&\left.\frac{x\sin(tx)}{t\,(1+x^2)}\right|_0^{+\infty}-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin(tx)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{2}{t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{t}F(t)-\frac{2}{t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\iff F(t)-tF'(t)=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

因为由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，所以可以对上式右侧做积分号下求导：

$$tF''(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(tx)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos(tx)\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}=-\left.\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\right|_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x=-1+tF(t)$$

$$\implies F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$$

3　设 $|\alpha|\neq 1$，证明积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，并求值.

解：考虑有限积分的极限。

因为 $\frac{1}{2x}$ 单调递减趋于 0，$\left|\int_0^A (\cos(\alpha-1)x-\cos(\alpha+1)x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{|\alpha+1|}+\frac{2}{|\alpha-1|}$，由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $|\alpha>1|$ 时，$\alpha-1,\alpha+1$ 同号：

$$\begin{aligned}&\int_0^A\frac{\sin x\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{\cos(\alpha-1)x-\cos(\alpha+1)x}{2x}\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{1}{2x}\mathrm{d}x\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}x\sin(tx)\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{2}\int_0^A\mathrm{d}x\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}\sin(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}\mathrm{d}t\int_0^A\sin(tx)\mathrm{d}x=\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}\frac{\mathrm{d}t}{2t}\int_0^A\sin(tx)\mathrm{d}(tx)\\=&\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|-\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}\frac{\cos(At)}{2t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $|\alpha<1|$ 时，$1-\alpha,\alpha+1$ 同号：

$$\begin{aligned}&\int_0^A\frac{\sin x\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{\cos(1-\alpha)x-\cos(\alpha+1)x}{2x}\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{1}{2x}\mathrm{d}x\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}x\sin(tx)\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{2}\int_0^A\mathrm{d}x\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\sin(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\mathrm{d}t\int_0^A\sin(tx)\mathrm{d}x=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\frac{\mathrm{d}t}{2t}\int_0^A\sin(tx)\mathrm{d}(tx)\\=&\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|-\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\frac{\cos(At)}{2t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由 Riemann 引理，当 $|\alpha>1|$ 时，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}\frac{\cos(At)}{2t}\mathrm{d}t=0$；当 $|\alpha<1|$ 时，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\frac{\cos(At)}{2t}\mathrm{d}t=0$. 因此：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|$$

解：使用积分因子法。

设 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x,\beta\geqslant 0$. 因为 $\alpha\neq 1$，所以 $\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}$ 单调递减一致趋于 0，且 $\left|\int_0^A\sin x\sin(\alpha x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{|\alpha-1|}+\frac{1}{|\alpha+1|}$，一致有界。由 Dirichlet 判别法，$I(\beta)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛。

考虑 $I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}\sin x\sin(\alpha x)\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x$. 同理，Dirichlet 判别法，$I'(\beta)$ 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛。

$$\begin{aligned}I'(\beta)&=-\int_0^{+\infty}\sin x\sin(\alpha x)\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha+1)x-\cos(\alpha-1)x}{2}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{2}\left(\frac{-\beta\cos(\alpha+1)x+(\alpha+1)\sin(\alpha+1)x}{\beta^2+(\alpha+1)^2}-\frac{-\beta\cos(\alpha-1)x+(\alpha-1)\sin(\alpha-1)x}{\beta^2+(\alpha-1)^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\beta^2+(\alpha+1)^2}-\frac{\beta}{\beta^2+(\alpha-1)^2}\right)\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{\beta\to+\infty}I(\beta)=0$，所以：

$$I(\beta)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\beta}{\beta^2+(\alpha-1)^2}-\frac{\beta}{\beta^2+(\alpha+1)^2}\right)\mathrm{d}\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+(\alpha-1)^2}{\beta^2+(\alpha+1)^2}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|$$

第二部分

历年试题

第十五章　USTC 期中期末测试 B2

15.1　中国科学技术大学 2011-2012 学年第二学期 数学分析 (B2) 第二次测验

1. 计算二重积分 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y$.

   解：

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y \\
=&\int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{y^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_1^2 \frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi y}{2}\right)\mathrm{d}y \\
=&-\frac{4}{\pi^2} y\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{8}{\pi^3}\sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}\frac{\pi y}{2} \\
=&\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3}
\end{aligned}
$$

2. 计算二重积分 $\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $x^2-2xy+y^2+x+y=0$ 和曲线 $x+y+4=0$ 围成的有界区域.

   解：设变换 $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$ ，于是 $D' = \left\{ (u,v) \middle| v \in [-2,2], -4 \leqslant u \leqslant -v^2 \right\}$，$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint_{D'} \frac{1}{2} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=&\frac{1}{2}\int_{-2}^2 \mathrm{d}v \int_{-4}^{-v^2} u\mathrm{d}u \\
=&-\frac{64}{5}
\end{aligned}
$$

3. 计算三重积分 $\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V：由 $z=xy, z=0, x=-1, x=1, y=2, y=3$ 围成.

   解：

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
=&\int_2^3 \mathrm{d}y \left(\int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_{xy}^0 xyz\mathrm{d}z + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{xy} xyz\mathrm{d}z\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_2^3 \mathrm{d}y\left(\int_{-1}^0 \frac{-x^2y^2}{2}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\mathrm{d}x\right)\\
&=0
\end{aligned}
$$

4. 设曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$，计算曲线积分 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$.

解：设变换 $\begin{cases} x=\cos 2\theta+1 \\ y=\sin 2\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\right|=2$，于是：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l\\
=&\int_0^{\pi} 2\sqrt{4\cos^4\theta+\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&4\int_0^{\pi}|\cos\theta|\mathrm{d}\theta\\
=&8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
=&8
\end{aligned}
$$

5. 计算曲面积分 $\iint_S z\mathrm{d}S$，其中 S：由 $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围成的立方体表面.

解：在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时，设变换 $\begin{cases} x=\sqrt{3}z\cos\theta \\ y=\sqrt{3}z\sin\theta \\ z=z \end{cases},\theta\in[0,2\pi]$

$$
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}z}\right|=\left|\sqrt{3}z\cos\theta\boldsymbol{i}+\sqrt{3}z\sin\theta\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k}\right|=2\sqrt{3}z
$$

在 $1\leqslant z\leqslant 2$ 时，设变换 $\begin{cases} x=2\sin\theta\cos\varphi \\ y=2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2\cos\theta \end{cases},\varphi\in[0,2\pi],\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|&=\left\|\begin{matrix} 2\cos\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & -2\sin\theta \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{matrix}\right\|\\
&=\left|-4\sin^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+4\sin^2\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+4\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{k}\right|\\
&=2\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_S z\mathrm{d}S\\
=&\int_0^1 2\sqrt{3}z^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\
=&\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2\theta\mathrm{d}2\theta\\
=&\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+3\right)\pi
\end{aligned}
$$

6. 证明：$\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_{x_1}^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_n = \dfrac{1}{2^n n!}$.

证明：设变换 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \boldsymbol{\varphi}(t_1,t_2,\cdots,t_n) = \left(t_1, t_1t_2, \cdots, \prod\limits_{i=1}^n t_i\right), (t_1,t_2,\cdots,t_n) \in [0,1]^n$，于是：

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}\right| \\
=&|\det \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})| \\
=&\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_3t_2 & t_3t_1 & t_2t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod\limits_{j\neq 1} t_j & \prod\limits_{j\neq 2} t_j & \prod\limits_{j\neq 3} t_j & \prod\limits_{j\neq 4} t_j & \cdots & \prod\limits_{j\neq n} t_j \end{matrix}\right\| \\
=&\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n t_i}\left\|\begin{matrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1t_2 & t_1t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1t_2t_3 & t_1t_2t_3 & t_1t_2t_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod\limits_{i=1}^n t_i & \prod\limits_{i=1}^n t_i & \prod\limits_{i=1}^n t_i & \prod\limits_{i=1}^n t_i & \cdots & \prod\limits_{i=1}^n t_i \end{matrix}\right\| \\
=&\prod_{i=1}^n t_i^{n-i}
\end{aligned}
$$

注意到：$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in V = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) | 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1\}$. 因此：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_{x_1}^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_n \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}x_n \int_0^{x_n} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_0^{x_2} x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_1 \\
=&\int_0^1 t_1^{n-1}\mathrm{d}t_1 \int_0^1 t_2^{n-2}\mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^1 t_n^0 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^i t_i \mathrm{d}t_n \\
=&\prod_{i=1}^n \int_0^1 t_i^{2(n-i)+1}\mathrm{d}t_i \\
=&\prod_{i=1}^n \frac{1}{2(n-i)} \\
=&\frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}
$$

7. 设一球面方程为 $x^2+y^2+(z+1)^2=1$，从原点向球面上任一点 Q 处的切平面作垂线，垂足为点 P，当 Q 在球面上变动时，点 P 的轨迹形成一封闭曲面 S，球此封闭曲面 S 所围成的立体的体积.

解：设球面上点的球坐标表示：$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + (\cos\theta - 1)\boldsymbol{k}, (\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$. 于是 $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ 处的切平面单位法向量为 $\boldsymbol{n}(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}$. 设 $P = t(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}(\theta,\varphi)$，由 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{QP}, |\boldsymbol{n}| = 1$ 得：

$$0 = t\boldsymbol{n}\cdot(t\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}) = t^2 - t + t\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = t\,(t - 1 + \cos\theta)$$

由于 t 不恒为 0，所以 $t = 1-\cos\theta$，于是 $P = \boldsymbol{\alpha}(\theta,\varphi) = (1-\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + (1-\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} +$

$(1-\cos\theta)\cos\theta\boldsymbol{k}$. 设 S 围成的区域为 V，以向外为 S 的正向，由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \mathrm{d}V\\
=&\iiint_V \nabla\cdot\left(\frac{x}{3}\boldsymbol{i}+\frac{y}{3}\boldsymbol{j}+\frac{z}{3}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}V\\
=&\oiint_{\partial V}\left(\frac{x}{3}\boldsymbol{i}+\frac{y}{3}\boldsymbol{j}+\frac{z}{3}\boldsymbol{k}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\left|\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\begin{vmatrix}(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi & (1-\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi & (1-\cos\theta)\cos\theta\\ \cos\varphi(\cos\theta-\cos 2\theta) & \sin\varphi(\cos\theta-\cos 2\theta) & \sin 2\theta-\sin\theta\\ -(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi & (1-\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}\mathrm{d}\varphi\right|\\
=&\left|\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{14\sin\theta-14\sin 2\theta+6\sin 3\theta-\sin 4\theta}{24}\mathrm{d}\varphi\right|\\
=&\frac{7}{3}\pi
\end{aligned}$$

15.2 中国科学技术大学 2011-2012 学年第二学期 数学分析 (B2) 第三次测验

1 求向量场 $\boldsymbol{v}=(yz,zx,xy)$ 的散度和旋度.

解：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=(x-x)\,\boldsymbol{i}+(y-y)\boldsymbol{j}+(z-z)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

2 计算第二型曲线积分：

$\int_L\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$，其中 L 是半球面 $\left\{x^2+y^2+z^2=a^2\middle|\,z\geqslant 0\right\}$ 与圆柱面 $\left\{x^2+y^2=b^2\right\}$ $(a>b>0)$ 的交线，L 的定向与 z 轴正向构成右手系.

解：由 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}
&\int_L\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z\\
=&\iint_{B(O,b)}(2x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&0
\end{aligned}$$

3 计算第二型曲线积分：

(1) $\iint\limits_S\left(y^2-x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(z^2-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $S=\left\{z=2-x^2-y^2\middle|\,z\geqslant 0\right\}$，$S$ 的定向与 z 轴的正向同侧.

解：设 $V=\left\{(x,y,z)\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 2-x^2-y^2\right\}$，由 Gauss 定理：

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S\left(y^2-x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(z^2-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iiint\limits_V(-1-1-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\overline{B(O,\sqrt{2})}}\left(x^2-0\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r\\
&=-4\sqrt{2}\pi+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r\\
&=\left(1-4\sqrt{2}\right)\pi
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\iint\limits_S\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中曲面 $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1\right\}$，正向是曲面的外法向.

解：设 $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}\leqslant 1\right\}$，由 Gauss 定理：

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_S\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
=&\iiint\limits_V\nabla\cdot\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&0
\end{aligned}
$$

4 给定平面分段光滑曲线 $L=\left\{y=2x^{\frac{2}{5}}+1\,\middle|\,x\in[-1,0]\right\}\cup\left\{y=-2x^5+1\,\middle|\,x\in[0,1]\right\}$，$L$ 的正向是参数 x 的增加方向，求积分 $\displaystyle\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

解：设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\in[-1,1],-1\leqslant y\leqslant 1-2x^5\,(x\geqslant 0),-1\leqslant y\leqslant 2x^{\frac{2}{5}}+1(x<0)\right\}$

设 $A(1,-1)$,$B(-1,3)$,$C(-1,-1)$，由 Green 公式：

$$
\begin{aligned}
&\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\int_{L\cup L_{AC}\cup L_{CB}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{L_{CA}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{L_{BC}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\int_{D\setminus B(O,\delta)}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{L_{CA}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{L_{BC}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\int_{\partial B(O,\delta)}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_3^{-1}\frac{-1}{1+y^2}\mathrm{d}y-\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2\sin^2\theta+\delta^2\cos^2\theta}{\delta^2}\mathrm{d}\theta\\
=&-2\pi+\frac{\pi}{2}+\arctan 3+\frac{\pi}{4}\\
=&\arctan 3-\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

5 设曲面 $S=\left\{x^2+y^2+z^2=1\,\middle|\,z\geqslant 0\right\}$，它的定向 $\boldsymbol{n}$ 是与 z 轴正向同侧的单位法向量，函数 $f=\sin\left(x^2+y^2+4xy\sqrt{z}\right),g=x^2+y^2+4z^2$，求积分 $\displaystyle\iint\limits_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

解：易知 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$
\nabla f=2\left(\left(x+2y\sqrt{z}\right)\boldsymbol{i}+\left(y+2x\sqrt{z}\right)\boldsymbol{j}+\frac{xy}{\sqrt{z}}\boldsymbol{k}\right)\cos\left(x^2+y^2+4xy\sqrt{z}\right)
$$

$$
\nabla g=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+8z\boldsymbol{k}=2\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+4z\boldsymbol{k}\right)
$$

$$
\iint\limits_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}
$$

$$
\begin{aligned}
&=4\iint\limits_S\begin{vmatrix}x+2y\sqrt{z} & y+2x\sqrt{z} & \dfrac{xy}{\sqrt{z}}\\ x & y & 4z\\ x & y & z\end{vmatrix}\cos\left(x^2+y^2+4xy\sqrt{z}\right)\mathrm{d}S\\
&=24\iint\limits_S\left(x^2-y^2\right)z\sqrt{z}\cos\left(x^2+y^2+4xy\sqrt{z}\right)\mathrm{d}S\\
&=24\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\cos 2\theta z\sqrt{z}\cos\left(\left(1-z^2\right)\left(1+2\sin 2\theta\sqrt{z}\right)\right)\mathrm{d}\theta\\
&=12\int_0^1\left(z\left(1-z^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\cos\left(\left(1-z^2\right)\left(1+2\sqrt{z}\sin 2\theta\right)\right)\mathrm{d}\sin 2\theta\\
&=6\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\cos\left(\left(1-z^2\right)\left(1+2\sqrt{z}\sin 2\theta\right)\right)\mathrm{d}\left(2\sqrt{z}\left(1-z^2\right)\sin 2\theta\right)\\
&=6\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\cos\left(\left(1-z^2\right)\left(1+2\sqrt{z}\sin 2\theta\right)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{d}z\\
&=0
\end{aligned}
$$

6 讨论如下问题：若两个向量场的散度和旋度相等，这两个向量场是否相等？

以下设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域，它的边界 $\partial\Omega$ 是光滑曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场，涉及到的函数和向量场具有二阶连续偏导数.

(1) 设 f 是 $\overline{\Omega}$ 上的函数，证明：、

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}$ 是 f 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

证明：由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS}&=\iint\limits_{\partial\Omega}\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\
&=\iint\limits_{\partial\Omega}\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\nabla\cdot\nabla f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint\limits_{V}\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{RHS}
\end{aligned}
$$

(2) 设定义在 $\overline{\Omega}$ 的函数满足 $\Delta f=0, f|_{\partial\Omega}\equiv 0$，证明 $f\equiv 0$.

证明：只需证 $\nabla f\equiv\mathbf{0}$. 只需证 $\iiint_\Omega(\nabla f)^2\,\mathrm{d}V=0$. 由于 $(\nabla f)^2+f\Delta f=\nabla\cdot(f\nabla f)$，所以只需证 $\iiint_\Omega\nabla\cdot(f\nabla f)\,\mathrm{d}V=0$. 由 Gauss 公式：

$$\iiint_\Omega\nabla\cdot(f\nabla f)\,\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}f\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

(3) 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的向量场降，满足：$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_1=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_2,\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1=\mathrm{div}\boldsymbol{v}_2$，问能否推出 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$？若成立，请证明之；若不然，你认为在什么合理条件下 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$？

解：不能。应当增加条件：$\forall P_0 \in \partial\Omega, \boldsymbol{v}_1(P_0) = \boldsymbol{v}_2(P_0)$，且 $\overline{\Omega}$ 是曲面单连通的.

证明：设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$，于是 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$，因此当 $\overline{\Omega}$ 曲面单连通时，$\boldsymbol{v}$ 是保守场，则存在数量场 ϕ 使得 $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$，且易知 $\Delta\phi = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$，即 ϕ 满足 Lalpace 方程. 由上一题的结论知，$\phi \equiv C$，也即 $\nabla\phi = \mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{v} \equiv \mathbf{0}$. □

15.3　中国科学技术大学 2011-2012 学年第二学期 数学分析 (B2) 第四次测验

1　设函数 $f(x) = \arcsin(\cos x)$，将 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成 Fourier 级数，并讨论此 Fourier 级数的收敛性，并利用此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解：注意到是偶函数，所以：$b_n = 0$，当 $n \in \mathbb{N}_+$ 时：

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \arcsin(\cos x)\cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}, & n \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 连续，且 $f(-\pi) = f(\pi)$，所以 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 于是令 $x = 0$，得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4}f(0) = \frac{\pi^2}{8}$$

2　求函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}\sin 2x$ 的 Fourier 变换。

解：因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-|x|}\sin 2x\right|\mathrm{d}x < 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2$，所以在 $\mathbb{R}$ 绝对可积，于是 $f(x)$ 存在 Fourier 变换。

$$\begin{aligned}
F[f](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x\mathrm{i}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\sin 2x\mathrm{e}^{-|x|-\lambda x\mathrm{i}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-2x\mathrm{i}}}{2}\left(\mathrm{e}^{-x-\lambda x\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-x+\lambda x\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{(-1-(\lambda-2)\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(-1+(\lambda+2)\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(-1-(\lambda+2)\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1+(\lambda-2)\mathrm{i})x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\lambda-2)\mathrm{i}} - \frac{1}{1-(\lambda+2)\mathrm{i}} - \frac{1}{1+(\lambda+2)\mathrm{i}} + \frac{1}{1-(\lambda-2)\mathrm{i}}\right) \\
&= \frac{1}{1+(\lambda-2)^2} - \frac{1}{1+(\lambda+2)^2} \\
&= \frac{8\lambda}{\lambda^4 - 6\lambda^2 + 25}
\end{aligned}$$

3　判断下面非正常积分的敛散性。

(1)　$\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$

解：

$$\int_1^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

因为 $\left|\int_1^A\cos y\mathrm{d}y\right|<2$，$\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ 单调递减趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知，积分收敛。

$$\int_1^{+\infty}\left|\cos\left(x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{|\cos y|}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y<\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2y+1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

同理，$\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 收敛，但 $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=+\infty$，所以不绝对收敛，因此条件收敛。

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}$

解：因为只有 $x=1$ 是积分的瑕点，被积函数为正，且 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}$ 在 $x\to 1^-$ 时等价于 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，又 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在 $[0,1)$ 上可积，所以原积分绝对收敛。

4 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x.$

解：

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x\\=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x\\=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\ln\sin x\\=&x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\\=&-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x\\=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln 2+\ln\sin x+\ln\cos x\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{\pi}{2}\ln 2+2I\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I=-\frac{\pi\ln 2}{2}\Longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

5 证明：

(1) 含参变量积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bx}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $0<b<+\infty$ 上收敛，但不一致收敛。

证明：$\forall\delta>0$，e^{-bx} 对于 $b\geqslant\delta$ 单调递减一致趋于 0，$\left|\displaystyle\int_0^A \sin x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，所以由 Dirichlet 判别法，积分对于 $b\geqslant\delta$ 一致收敛，因此对于 $b>0$ 收敛。

反设对于 $b>0$ 一致收敛，由 Cauchy 收敛准则：

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall B>A>X,\forall b>0,\left|\int_A^B \mathrm{e}^{-bx}\sin x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

在其中令 $b\to 0^+$，于是 $\left|\displaystyle\int_A^B \sin x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$，但是当 $\varepsilon\leqslant 2$ 时，总可以找到 $B>A>X$，使得 $\left|\displaystyle\int_A^B \sin x\mathrm{d}x\right|=2\geqslant\varepsilon$，矛盾！因此不一致收敛。 □

(2) 对任一正实数 $\varepsilon>0$，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bx}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $0<\varepsilon\leqslant b<+\infty$ 上一致收敛。

证明：在 (1) 中已证。 □

6 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数，而其导函数 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐段光滑，证明：函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n 和 b_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n\max\{|a_n|,|b_n|\}=0$.

证明：我们只需证明：$a_n,b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ 即可。设 $f(x)$ 周期为 $T>0$. 因为 $f'(x)$ 在 $[0,T]$ 逐段光滑，所以有界，设 $\sup\limits_{x\in[0,T]}|f'(x)|=M$.

$$\begin{aligned}
a_n=&\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{T}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}T}^{\frac{k}{n}T} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{T}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}T}^{\frac{2k-1}{2n}T}\left(f(x)-f(x+\frac{T}{2n})\right)\cos\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{T}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}T}^{\frac{2k-1}{2n}T}\cos\frac{2\pi nx}{T}\left(\int_{x+\frac{T}{2n}}^x f'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |a_n|\leqslant\frac{2}{T}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}T}^{\frac{2k-1}{2n}T}\left|\cos\frac{2\pi nx}{T}\right|\left|\int_{x+\frac{T}{2n}}^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{n}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}T}^{\frac{2k-1}{2n}T}\left|\cos\frac{2\pi nx}{T}\right|\mathrm{d}x=\frac{TM}{2\pi n}$$

同理，$|b_n|\leqslant\dfrac{TM}{2\pi n}$. 因此 $a_n,b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$. □

7 利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，分别解决下列问题：

(1) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}_+$.

解：

$$\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x^2=-\frac{x\mathrm{e}^{-nx^2}}{2n}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{n}}$$

(2) 对固定的参数 $t>0$，求函数 $F(\lambda)=\mathrm{e}^{-t\lambda^2}$ 的 Fourier 逆变换。

解：注意到 $F(\lambda)$ 是偶函数，所以 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\lambda^2}\cos(x\lambda)\mathrm{d}\lambda$. 当 $x=0$ 时，$f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{t\pi}}$；当 $x\neq 0$ 时：因为 $\mathrm{e}^{-t\lambda^2}$ 单调递减趋于 0，$\left|\displaystyle\int_0^A\cos(x\lambda)\mathrm{d}\lambda\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$，由 Dirichlet 判别法，积分收敛。

$$\begin{aligned}
f(x)=&\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\lambda^2}\cos(x\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\lambda^2}\left(\mathrm{e}^{x\lambda\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-x\lambda\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{t}\lambda-\frac{x\mathrm{i}}{2\sqrt{t}}\right)^2}+\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{t}\lambda+\frac{x\mathrm{i}}{2\sqrt{t}}\right)^2}\right)\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{t}\lambda-\frac{x\mathrm{i}}{2\sqrt{t}}\right)^2}+\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{t}\lambda+\frac{x\mathrm{i}}{2\sqrt{t}}\right)^2}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{t}\lambda\right)\\
=&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{t\pi}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ f(x)=\frac{1}{2\sqrt{t\pi}\exp\left(\frac{x^2}{4t}\right)}$$

15.4 中国科学技术大学 2012-2013 学年第二学期 数学分析 (B2) 第一次测验

1 下面两个函数在原点的连续性如何，偏导数是否存在，是否可微？

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x,x^3)=\dfrac{1}{2}\neq0=f(0,0)$，所以不连续，不可微.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-0}{x}=0=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-0}{y}$，所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解：因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant1$，又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy=0$，$|xy|\geqslant f(x,y)\geqslant0$，由夹逼定理，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，所以连续.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-0}{x}=0=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-0}{y}$，所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$

由于当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\left|\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，在原点可微.

2 设 $D=\{(x,y)|\,x>0,y>0\}$. 求函数 $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ 在区域 D 上的极值，并说明所求极值是否是最值.

解：由于 D 是开区域，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=+\infty, \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=+\infty$，所以只可能存在最小值和极大、极小值，最小值一定是极小值，且在 D 内部取到。令 $\nabla f(x,y)=\mathbf{0}$：

$$\begin{cases} y-\frac{50}{x^2}=0 \\ x-\frac{20}{y^2}=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

所以只有一个极值点，又因为 $xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\geqslant 3\sqrt[3]{1000}=30=f(5,2)$，所以是最值点.

3 用 Lagrange 乘数法求抛物线 $y=\left(x-\sqrt{2}\right)^2$ 上的点到原点的最小距离.

解：设 $f(x,y)=x^2+y^2, g(x,y)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2-y$，令：

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda-1} \\ y=-\frac{1}{2}\lambda \\ y=\left(x-\sqrt{2}\right)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+y(x)^2\right)=+\infty$，所以最小距离 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4 求常数 c 使得变换 $\begin{cases} u=2x+y \\ v=x+cy \end{cases}$ 将方程 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中二阶偏导数均连续.

解：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial u}+c\frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$

此时，有：

$$\begin{aligned} 0=&2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ =&\left(2\left(2\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2-5\left(2\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}+c\frac{\partial}{\partial v}\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial u}+c\frac{\partial}{\partial v}\right)^2\right)z \\ ==&(3-6c)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(2c^2-5c+2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} 3-6c\neq 0 \\ 2c^2-5c+2=0 \end{cases} \iff c=2$$

5 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有二阶偏导数，且二阶偏导数都为零. 求证：$f(x,y)$ 是至多一次函数，即存在常数 a,b,c 使得 $f(x,y)=ax+by+c$.

证明：任取 $(x_0,y_0)\in D$，不妨设 D 是连通的，否则在每一块连通区域里进行如下求解。$\forall(x,y)\in D$，存在一条连接 (x_0,y_0) 和 (x,y) 的分段光滑曲线 L，设其参数表示为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)+y(t), t\in[\alpha,\beta], \boldsymbol{r}(\alpha)=(x_0,y_0), \boldsymbol{r}(\beta)=(x,y)$. 由二阶导恒为零，知一阶导始终不变，设 $\frac{\partial f}{\partial x}=a, \frac{\partial f}{\partial y}=b$，于是：

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\int_\alpha^\beta \nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)=\int_\alpha^\beta \nabla f\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\left(ax'(t)+by'(t)\right)\mathrm{d}t=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

令 $f(x_0,y_0)-ax_0-by_0=c$，即有：

$$f(x,y)=ax+by+c$$

6 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ax+by+cz=\varphi\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 所确定的隐函数，其中 φ 是一个可微的一元函数，a,b,c 是常数，求证：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

证明：两边对于 x,y 求梯度：

$$\left(a+c\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(b+c\frac{\partial z}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}=2\varphi'\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(y+z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}\right)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\varphi'x-a}{c-2\varphi'z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2\varphi'y-b}{c-2\varphi'z}\end{cases}$$

等价于证明：

$$(cy-bz)\left(2\varphi'x-a\right)+(az-cx)\left(2\varphi'x-b\right)+(bx-ay)\left(2\varphi'z-c\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow 2\varphi'\left((cy-bz)x+(az-cx)y+(bx-ay)z\right)=a(cy-bz)+b(az-cx)+c(bx-ay)$$

两边均为 0，成立. □

7 设 $P_n=(x_n,y_n)$, $n=1,2,\ldots$ 是平面上的一个有界点列，求证：$\{P_n\}$ 有收敛的子列.

证明：设 $P_n=(x_n,y_n)$，由 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{x_n\}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}^{\infty}$，又 $\{y_{n_k}\}^{\infty}$ 是有界数列，再利用 Bolzano-weierstrass 定理，存在收敛子列 $\left\{y_{n_{k_l}}\right\}^{\infty}$. 于是 $\left\{P_{n_{k_l}}\right\}^{\infty}$ 收敛。 □

15.5　中国科学技术大学 2012-2013 学年第二学期 数学分析 (B2) 第二次测验

1 简答题

(1) 设 $\int_I f\mathrm{d}\sigma>0$，其中 I 为闭矩形，f 在 I 上连续. 说明在 I 的内部存在闭矩形 J，使得 $f>0$ 在 J 上成立.

证明：因为 $\int_I f\mathrm{d}\sigma>0$，所以必 $\exists P_0\in I,f(P)>0$. 因为 f 在 I 上连续，所以 $\exists\delta_1>0$，使得 $f(P)>\frac{1}{2}f(P_0)>0,P\in\overline{B(P_0,\delta_1)}\cap I$. 不妨设闭矩形 I 的两条边分别与 x,y 轴平行，不妨设闭矩形为 $[a,b]\times[c,d]$，设 $P_0=(x_0,y_0)$，不妨设 $a\leqslant x_0<b,c\leqslant y_0<d$，于是，取 $0<\delta_2,\delta_3<\frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1$，则满足 $J=[x_0,x_0+\delta_2]\times[y_0,y_0+\delta_3]\subset\left([a,b]\times[c,d]\cap\overline{B(P_0,\delta_1)}\right)$，且 $\forall P\in J,f(P)>0$ □

(2) 构造一个 $D=[-1,1]^2$ 上的非负函数 $f(x,y)$，使得 f 在 D 上积分为 0，但是 $f(x,0)$ 关于 x 不可积，而对任意 $y>0$，$f(x,y)$ 关于 y 可积. 并说明理由.

解：设 $f(x,y)=\begin{cases}0, & y\neq 0\\ D(x), & y=0\end{cases}$，其中 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. 由有理数和无理数在实数集中的稠密性，$\forall[a,b]\subset[-1,1],\max|f(x_1,0)-f(x_2,0)|=1,\forall x_1,x_2\in[a,b]$. 因此 $f(x,0)$ 对于 x 不可积，同时，由于 $f(x,y)$ 对于固定的 x，对于 y 只有有限个第一类间断点，所以可积。又因为 $\sigma\left(\{(x,0)|-1\leqslant x\leqslant 1\}\right)=0$，所以 $\iint_{[-1,1]^2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$

2 计算积分

(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x+y}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解：设 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$，代入 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 得 $0\leqslant r\leqslant\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}],\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}&\iint_{x^2+y^2\leqslant x+y}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\\=&\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^3\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta\\=&\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t\\=&\frac{8\sqrt{2}}{9}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z.$

解：设 $(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z),r\in[0,1],\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，于是

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z\\=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2\mathrm{d}z\\=&\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}r-r^4}{3}\mathrm{d}r\\=&\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{(2-t)^{\frac{3}{2}}-2t^4}{6}\mathrm{d}t\\=&\frac{\pi}{2}\left.\frac{(2-t)^{\frac{5}{2}}+t^5}{15}\right|_1^0\\=&\frac{2\sqrt{2}-1}{15}\pi\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解：

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\=&\int_0^1 y\mathrm{d}y\left.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right|_y^1\\=&\int_0^1\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)y-y\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right)\mathrm{d}y\\=&\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}-\int_0^1 y\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}-\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} t\sinh t\cosh t\mathrm{d}t\\
&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}-\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}}{16}2t\mathrm{d}(2t)\\
&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}-\int_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{16}t\mathrm{d}t\\
&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}-\left.\frac{t\left(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}\right)}{16}\right|_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+\int_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{16}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{z\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

解：设 $(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,,r\in[0,1],\theta\in[0.,2\pi],\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，于是

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{z\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&2\pi\int_{-1}^{1}\frac{z\ln\left(r^2+z^2+1\right)}{r^2+z^2+1}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{1-z^2}}r\mathrm{d}r\\
=&2\pi\int_{1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}\left(\ln\left(r^2+z^2+1\right)\right)\int_0^{\sqrt{1-z^2}}r\mathrm{d}r\\
=&0
\end{aligned}
$$

3　计算由 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ 所围成的闭区域的面积.

解：设 $D=\left\{(x,y)|\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\leqslant 1\right\}$，设变换：$x,y\geqslant 0$ 时 $(x,y)=\left(u^2,v^2\right),\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，由对称性：

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(D\right)=&4\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}4uv\mathrm{d}v\\
=&8\int_0^1u\left(1-u\right)^2\mathrm{d}u\\
=&\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

4　计算由 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z^2$ 围成的立体的体积.

解：设 $(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$，代入 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\leqslant z^2$ 得 $0\leqslant r\leqslant|\cos\theta|,\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$，于是：

$$
\begin{aligned}
V=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{|\cos\theta|}r^2\mathrm{d}r\\
=&2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta|\cos^3\theta|}{3}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证：对于任意 $x\in(a.b)$，有

$$\int_a^x \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^n f(y)\mathrm{d}y,\, n\in\mathbb{N}_+$$

证明：下用数学归纳法证明其成立：

当 $n=0$ 时，易见：$\displaystyle\int_a^x f(x_1)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{1!}\int_a^x(x-y)^0 f(y)\mathrm{d}y$ 成立。

假设 $n=m-1$ 时成立，那么当 $n=m$ 时：

$$\begin{aligned}&\int_a^x \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_m}f(x_{m+1})\mathrm{d}x_{m+1}\\&=\int_a^x\left(\frac{1}{(m-1)!}\int_a^u(u-y)^{m-1}f(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u\\=&\int_a^x f(y)\mathrm{d}y\int_y^x\frac{(u-y)^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{d}u\\=&\int_a^x\frac{1}{m!}(x-y)^m f(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

6 计算下述积分：

$$\iiint\limits_V\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \iiint\limits_V\cos\left(ax+by+cz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 V 是单位球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，a,b,c 为常数，满足 $a^2+b^2+c^2=1.$

解：(1)

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\=&\int_{-1}^1\cos x\mathrm{d}x\iint_{B\left(O,\sqrt{1-x^2}\right)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\=&\pi\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\sin x\\=&2\pi\sin 1-\pi\left(\left(x^2-2\right)\sin x+2x\cos x\right)\Big|_{-1}^1\\=&4\pi\left(\sin 1-\cos 1\right)\end{aligned}$$

解：(2) 注意到：$a^2+b^2+c^2=1$，所以设变换 $\boldsymbol{\varphi}:\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&-a&0\\ac&bc&-a^2-b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，易知 $\boldsymbol{\varphi}$ 是正交变换，所以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$，$V'=\overline{B\left(O,1\right)}$，于是

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V\cos\left(ax+by+cz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\=&\iiint\limits_{V'}\cos u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\=&4\pi\left(\sin 1-\cos 1\right)\end{aligned}$$

15.6　中国科学技术大学 2012-2013 学年第二学期 数学分析 (B2) 第三次测验

1 已知向量场 $\boldsymbol{v}=\left(2xz,2yz^2,x^2+2y^2z-1\right).$

(1)　求 $\boldsymbol{v}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$.

解：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

(2)　问 $\boldsymbol{v}$ 是否是一个有势场？若是，求出 $\boldsymbol{v}$ 的一个势函数.

解：由于 $\boldsymbol{v}$ 可以在 $\mathbb{R}^3$ 上有定义，且 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，所以是有势场. 设 $\phi(x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的势函数，于是：

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)=&\int_0^x 0\mathrm{d}t+\int_0^y 0\mathrm{d}t+\int_0^z\left(x^2+2y^2t-1\right)\mathrm{d}t+\phi(0,0,0)\\=&x^2z+y^2z^2-z+C\end{aligned}$$

2

(1)　求向量场 $\boldsymbol{v}=(z,x,y)$ 沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,at)$, $t\in[0,2\pi]$ 的第二型曲线积分，t 是曲线的正向参数.

解：

$$\begin{aligned}&\int_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\=&\int_0^{2\pi}(at,a\cos t,a\sin t)\cdot(-a\sin t,a\cos t,a)\,\mathrm{d}t\\=&a^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2t+(1-t)\sin t\right)\mathrm{d}t\\=&a^2\pi-a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t\\=&a^2\pi-2\pi a^2\\=&-a^2\pi\end{aligned}$$

(2)　设曲面 $S=\left\{z=a^2-x^2-y^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$，$S$ 的定向与 z 轴正向同向，求积分 $\displaystyle\iint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

解：设 V 是 S 与 Oxy 平面围成的区域，由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}&\iint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\=&\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V+\iint_{B(O,|a|)}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\=&3\iiint_V\mathrm{d}V+0\\=&3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{|a|}r\mathrm{d}r\int_0^{a^2-r^2}\mathrm{d}z\\=&3\pi\int_0^{|a|}\left(a^2-r^2\right)\mathrm{d}\left(r^2\right)\\=&\frac{3}{2}a^2\pi\end{aligned}$$

3 设 $a>b>0$，求椭圆 $\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ 与椭圆盘 $\left\{\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqslant 1\right\}$ 公共部分的面积.

解：注意到：$a>b>0$，由对称性，设 $S=\{(x,y)\in E_1|\,x\geqslant y\geqslant 0\}$，$\partial S$ 以逆时针为正向，由 Green 公式：

$$\begin{aligned}
S\left(E_1\cap E_2\right)=&8\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&8\int\limits_{\partial S} x\mathrm{d}y\\
=&8\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{(0,0)} x\mathrm{d}y+8\int_{\ell}x\mathrm{d}y\\
=&8ab\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-8\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}x\mathrm{d}x\\
=&4ab\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(1+\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\\
=&4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+2ab\sin\left(2\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\\
=&4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

4 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上的光滑函数，向量场 $\boldsymbol{v}=f(r)\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z),r=|\boldsymbol{r}|$.

(1) 证明 $\boldsymbol{v}$ 是无旋场.

证明：$\boldsymbol{v}=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，于是：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

同理，有：$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$，因此：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

(2) 若 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$，求 f.

解：

$$\begin{gathered}
\Longleftrightarrow\ f+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}f'+f+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}f'+f+\frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}f'=0\\
\Longleftrightarrow\ 3f(r)+rf'(r)=0\\
\Longrightarrow\ f=Cr^{-3},C\in\mathbb{R}
\end{gathered}$$

5 设 $\boldsymbol{v}$ 是定义在区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\dfrac{1}{4}<x^2+y^2+z^2<\dfrac{5}{4}\right.\right\}$ 上的光滑向量场，曲面 $S=\left\{x^2+y^2+z^2=1\right\}$，正向为外法向，证明：$\displaystyle\iint\limits_S \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$.

解：在球坐标系中，设 $\boldsymbol{v}=V_r\boldsymbol{e}_r+V_\theta\boldsymbol{e}_\theta+V_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$，有：

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi\end{vmatrix}$$

注意到：S 上 (r,θ,φ) 处的单位外法向量为 $\boldsymbol{e}_r$，因此：

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint\limits_S \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta V_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rV_\theta\right)\right)\mathrm{d}S\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta V_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rV_\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left(r\sin\theta V_\varphi\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\pi}\left(rV_\theta\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\theta\\&=0\end{aligned}$$

这是因为 $(r\sin\theta V_\varphi)_{\theta=0}=(r\sin\theta V_\varphi)_{\theta=\pi},(rV_\theta)_{\varphi=0}=(rV_\theta)_{\varphi=2\pi}$ □

6　设 u 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数，$\boldsymbol{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的光滑向量场; Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个有界区域，它的边界 $S=\partial\Omega$ 是光滑曲面，并且函数 u 满足：$u(x,y,z)\equiv C,\forall(x,y,z)\in S$，证明：

$$\iiint\limits_\Omega(\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

证明：注意到 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\times a\cdot\boldsymbol{b}-\nabla\times b\cdot\boldsymbol{a}$，所以：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}u=(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\nabla u=\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\nabla u)+\nabla\times\nabla u\cdot\boldsymbol{v}=\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\nabla u)$$

由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_\Omega(\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\=&\iint\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\times\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\=&\iint_{\partial\Omega}\nabla u\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}\\=&0\end{aligned}$$

这是因为 $u(x,y,z)\equiv C,\forall(x,y,z)\in S$，且 S 光滑，有切平面和外法向量场 $\boldsymbol{n}$，于是 $\nabla u\parallel\boldsymbol{n}$，所以 $\nabla u\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$ □

15.7　中国科学技术大学 2012-2013 学年第二学期 数学分析 (B2) 第四次测验

1　将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\0, & 1\leqslant|x|<\pi\end{cases}$ 展开成 Fourier 级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2}$.

解：以 2π 为周期将 $f(x)$ 进行周期延拓，易知 $f(x)$ 是偶函数，所以：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & n=0\\\frac{2\sin n}{n\pi}, & n\in\mathbb{N}_+\end{cases}$$

$$\implies f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos nx}{n}$$

$$\implies 1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\sin n\cos nx}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$$

$$\implies\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$$

2 求函数 $f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1\\ 1, & |x|<1\end{cases}$ 的 Fourier 变换，并计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{x}\mathrm{d}x$.

解：因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=2$，所以可以进行 Fourier 变换。$f(x)$ 的 Fourier 变换为：

$$F[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi=\int_{-1}^{1}\cos(\lambda\xi)\mathrm{d}\xi=\begin{cases}2, & \lambda=0\\ \frac{2}{\lambda}\sin\lambda, & \lambda\neq 0\end{cases}$$

注意到：$F[f](\lambda)$ 是偶函数，所以：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\cos(\lambda x)}{\lambda}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}1, & x\in(-1,1)\\ \frac{1}{2}, & x=\pm 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

取 $x=\frac{1}{2}$，即得：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

3 研究 p 的取值范围使得广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛、条件收敛；请说明原因。

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2$$

因为 I_1 仅有 $x=0$ 为瑕点，又 $\dfrac{\sin x}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^{p-1}}$ $(x\to 0^+)$，所以 I_1 收敛当且仅当 $p-1<1$，也即 $p<2$.

当 $p<2$ 时，考虑 I_2.

当 $p\in(0,2)$ 时：$\left|\displaystyle\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，$\dfrac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知积分条件收敛。

当 $p\leqslant 0$ 时，$\left|\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\right|\geqslant 2$，所以积分不收敛。

当 $p\in(1,2)$ 时，由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x<\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{p-1}$，所以绝对收敛。

当 $p\in(0,1]$ 时，由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}\mathrm{d}x$. 同理知 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=+\infty$，所以不绝对收敛。

综上所述，$p\in(1,2)$ 时绝对收敛，$p\in(0,1]$ 时条件收敛。

4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且 $f(x)>0$，研究函数 $g(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 的连续性。

解：因为 $\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 对于 $y\neq 0$ 连续，所以 $g(y)$ 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 连续。下面考虑 $y=0$ 处 $g(y)$ 的连续性。由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续恒正，所以设 $0<\inf\limits_{x\in[0,1]}f(x)=m\leqslant M=\sup\limits_{x\in[0,1]}f(x)$. 因为 $g(0)=0, f(x)>0$，所以：

$$\lim_{y\to 0}|g(y)-g(0)|=\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

因为 $\forall y\in(0,1)$：

$$\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\geqslant m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y}\geqslant\frac{m\pi}{4}$$

所以 $g(y)$ 在 $y=0$ 处不连续，在 $(0,1]$ 连续。

5 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\cos x dx$.

解：

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\cos x dx = \int_0^{+\infty} dx \int_{-2}^{-1} e^{xy}\cos x dy$$

因为 $\forall y \in [-1,-2]$，$\left|\displaystyle\int_0^A \cos x dx\right| < 1$，$e^{xy}$ 单调递减一致趋于 0，所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{xy}\cos x dx$ 一致收敛。于是含参反常积分可以交换顺序：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\cos x dx &= \int_0^{+\infty} dx \int_{-2}^{-1} e^{xy}\cos x dy \\ &= \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{+\infty} e^{xy}\cos x dx \\ &= \int_{-2}^{-1}\left(\frac{\sin x + y\cos x}{y^2+1}e^{xy}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right) dy \\ &= -\int_{-2}^{-1}\frac{y}{y^2+1}dy \\ &= \frac{\ln 5 - \ln 2}{2}\end{aligned}$$

6 试利用 Euler 积分来计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx$.

解：

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx \\ \xlongequal{t=\frac{1}{x+1}}&\int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{4}} t^2 \frac{dt}{t^2} \\ =&\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} dt \\ =&B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) \\ =&\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} \\ =&\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \\ =&\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

7 设：

(1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微且单调下降趋于 0；

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$；

(3) $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积。

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛。

证明：因为

$$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx = \int_a^{+\infty} x df(x) = xf(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

所以等价于证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ 存在。

由 Cauchy 收敛准则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t=0$，又因为 $\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant xf(2x)\geqslant 0$，所以由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(2x)=0$，于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$. □

15.8　中国科学技术大学 2012-2013 学年第二学期 数学分析 (B2) 期末测验

1　设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数，求 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

解：

$$\begin{cases} u^2(x,y)+v^2(x,y)+x^2+y^2=1 \\ u(x,y)+v(x,y)+x+y=0 \end{cases} \implies \begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+x=0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+y=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+1=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}+1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

由 Binet-Cauchy 公式：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{x-y}{u-v}$$

2　计算积分 $\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}} x^2\sin(xy)\mathrm{d}x$.

解：代换：$\begin{cases} u=x \\ v=\frac{y}{x} \end{cases}$，于是：$(u,v)\in[0,\sqrt{\pi}]\times[0,1]$，且：$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=u$，于是：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}} x^2\sin(xy)\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^{\sqrt{\pi}} u^3\sin(u^2v)\mathrm{d}u \\
=&\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{2}\sin(u^2v)\mathrm{d}u^2 \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^{\pi} u\sin(uv)\mathrm{d}u \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}u\int_0^1 \sin(uv)u\mathrm{d}v \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos u)\,\mathrm{d}u \\
=&\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3　计算抛物线 $2x = y^2$ 与直线 $y = 2x - 2$ 所围成的区域的面积。

解：

$$\begin{cases} 2x = y^2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

由 Green 公式，设围成的区域为 S，则：

$$\begin{aligned} S =& \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =& \oint_{\partial S} x\mathrm{d}y \\ =& -\int_{-1}^{2} \frac{y^2 - y - 2}{2}\mathrm{d}y \\ =& \frac{15}{4} \end{aligned}$$

4　求常数 a 使得向量场 $\boldsymbol{F} = \left(x^2 + 5ay + 3yz, 5x + 3axz - 2, (a+2)xy - 4z\right)$ 是有势场，并求出此时的势函数。

解：$\boldsymbol{F}$ 定义域为 $\mathbb{R}^3$，所以 $\boldsymbol{F}$ 是有势场等价于 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$，也即：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + 5ay + 3yz & 5x + 3axz - 2 & (a+2)xy - 4z \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

解得：$a = 1$，于是 $\boldsymbol{F} = \left(x^2 + 5y + 3yz, 5x + 3xz - 2, 3xy - 4z\right)$. 设 $(0,0,0)$ 处势能为 C，则势函数为：

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) =& C + \int_0^x t^2\mathrm{d}t + \int_0^y (5x - 2)\,\mathrm{d}t + \int_0^z (3xy - 4t)\,\mathrm{d}t \\ =& C + \frac{x^3}{3} + 5xy - 2y + 3xyz - 2z^2, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6　求证 $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1 + (x+t)^2}\mathrm{d}t$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 有二阶连续导数且满足微分方程 $f''(x) + f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

证明：因为：$\displaystyle\int_0^A \cos t\mathrm{d}t$ 对 x 一致有界，$\frac{1}{1+(x+t)^2}$ 对 $x \geqslant 0$ 单调递减一致趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知 $f(x)$ 一致收敛。注意到：

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1 + (x+t)^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{1 + 1 + (x+t)^2}$$

考虑：

$$\begin{aligned} f'(x) =& \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos t}{1 + (x+t)^2}\mathrm{d}t \\ =& \int_0^{+\infty} \cos t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1 + (x+t)^2}\mathrm{d}t \\ =& \frac{\cos t}{1 + (x+t)^2}\bigg|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 + (x+t)^2}\mathrm{d}t \\ =& -\frac{1}{1 + x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 + (x+t)^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

由 Dirichlet 判别法，易见其一致收敛，所以 $f'(x)$ 一致收敛。考虑：

$$f''(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin t}{1 + (x+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}+\int_0^{+\infty}\sin t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}+\left.\frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\right|_{t=0}^{t=+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由 Dirichlet 判别法，易见其一致收敛，所以 $f''(x)$ 一致收敛。于是：

$$f''(x)+f(x)=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\quad\square$$

证明：因为：$\displaystyle\int_0^A\cos t\mathrm{d}t$ 对 x 一致有界，$\frac{1}{1+(x+t)^2}$ 对 $x\geqslant 0$ 单调递减一致趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知 $f(x)$ 一致收敛。

$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t-x)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

同理，易知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2\mathrm{e}},\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 绝对收敛，于是 $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t,\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 关于 x 绝对一致收敛。

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t-\cos x\frac{\cos x}{1+x^2}+\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t-\sin x\frac{\sin x}{1+x^2}\\
&=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

$$f''(x)=-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\Longrightarrow\ f''(x)+f(x)=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

7　设 D 是 xOy 平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域，$f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数，且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a\frac{\partial f}{\partial x}+2b\frac{\partial f}{\partial y}+cf$$

其中 a,b,c 为常数且 $c\geqslant a^2+b^2$. 求证：若 f 在 ∂D 上恒为零，则 f 在 D 上恒为零。

证明：由 Green 公式，当 f 在 ∂D 上恒为零时：

$$
\begin{aligned}
0&=\oiint_{\partial D}f\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s\\
&=\oiint_{\partial D}f\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\\
&=\oiint_{\partial D}f\nabla f\cdot(\mathrm{d}y\boldsymbol{i}-\mathrm{d}x\boldsymbol{j})\\
&=\oiint_{\partial D}f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right)\\
&=\int_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+f\Delta f\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+2af\frac{\partial f}{\partial x}+2bf\frac{\partial f}{\partial y}+cf^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}-af\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}-bf\right)^2+\left(c-a^2-b^2\right)f^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\geqslant 0
\end{aligned}
$$

因为 f 在 D 上连续，所以当且仅当 $f\big|_D=0$ 时取等。 □

15.9　中国科学技术大学 2013-2014 学年第二学期 数学分析 (B2) 第一次测验

1　概念题：

(1)　叙述 n 元函数 $z=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在其定义域 D 中一点 $\boldsymbol{x}$ 可微的定义。

解：如果存在 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 使得：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{y}\in B\left(\boldsymbol{x},\delta\right)\cap D,\left|f(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)\right|<\varepsilon$$

那么 f 在 $\boldsymbol{x}\in D$ 处可微。

(2)　叙述二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿方向 $\boldsymbol{e}=(u_0,v_0)$ 的方向导数的定义。

解：若 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+tu_0,y_0+tv_0)-f(x_0,y_0)}{t}$ 存在，则二元函数 f 在 (x_0,y_0) 处沿方向 $\boldsymbol{e}=(u_0,v_0)$ 的方向导数存在。

2　下面的函数在原点的连续性如何，偏导数是否存在，是否可微？

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，所以在原点连续。

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x}=1,\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x}=-1$，所以对 x 的偏导数不存在，同理，对 y 的偏导数同样不存在。

由于偏导数不存在，所以不可微。

3　求函数 $f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 的极值点。

解：$f_x'(x,y)=-(1+\mathrm{e}^y)\sin x,f_y'(x,y)=-(y+1-\cos x)\mathrm{e}^y$. 令 $f_x'=f_y'=0$，得：$\begin{cases}x=k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ y+1-\cos x=0\end{cases}$.

于是，极值点为：$\left(k\pi,(-1)^k-1\right),k\in\mathbb{Z}$.

4 求函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 之下的极值。

解：由 Lagrange 乘数法，令：

$$\begin{cases}\frac{1}{a}=2\lambda x\\ \frac{1}{b}=2\lambda y\\ x^2+y^2=1\end{cases}\implies\begin{cases}x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

因为 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，所以在 $x^2+y^2=1$ 上取到最大值和最小值，又因为 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上非常值，因此取到极大值和极小值，2 个极值为：

$$f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

5 求常数 c 使得变换 $\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$ 将方程 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.(假设偏导数连续)

解：因为 $\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$，所以：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+c\frac{\partial z}{\partial v}\end{cases}$，因此：

$$\begin{aligned}0=&2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\ =&8\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+8\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-5\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2c+1)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+c\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4c\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2c^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ =&(3-6c)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(2-5c+2c^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

所以 $\begin{cases}3-6c\neq 0\\ 2-5c+2c^2=0\end{cases}\implies c=2$

6 求在 $\mathbb{R}^2$ 上满足方程组 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=af\\ \frac{\partial f}{\partial y}=bf\end{cases}$ 的二元可微函数 $f(x,y)$，其中 a,b 是常数。

解：设 $f(0,0)=C$，那么：

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}=af(x,0)\implies f(x,0)=C\mathrm{e}^{ax}$$

固定 x，因为 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=bf(x,y)$，所以：

$$f(x,y)=C\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{by}=C\mathrm{e}^{ax+by}$$

7 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ax+by+cz=\varphi\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 所确定的隐函数，其中 φ 是一个可微的一元函数，a,b,c 是常数。求证：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

解：$\begin{cases}a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi'\\ b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi'\end{cases},c\neq 0.\implies\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{a-2x\varphi'}{2z\varphi'-c}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{b-2y\varphi'}{2z\varphi'-c}\end{cases}$. 因此只需证：

$$(cy-bz)(a-2x\varphi')+(az-cx)(b-2y\varphi')+(bx-ay)(c-2z\varphi')=0$$

易见，成立。 □

15.10　中国科学技术大学 2013-2014 学年第二学期 数学分析 (B2) 第三次测验

1　求向量场 $\boldsymbol{v}=(y,z,x)$ 沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)\,,t\in[0,2\pi]$ 的曲线积分，t 是曲线的正向参数，a,b 为正的常数。

解：

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=&\int_0^{2\pi}\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}(t)\right)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t\\=&\int_0^{2\pi}\left(a\sin t,bt,a\cos t\right)\cdot\left(-a\sin t,a\cos t,b\right)\mathrm{d}t\\=&a\int_0^{2\pi}\left(-a\sin^2 t+b(t+1)\cos t\right)\mathrm{d}t\\=&-a^2\pi\end{aligned}$$

2　计算积分 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}|y|\sqrt{z}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\,(z\leqslant 1)$.

解：

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}|y|\sqrt{z}\mathrm{d}S=&\iint\limits_{B(O,1)}|y|\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S\\=&\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r|\sin\theta|r\mathrm{d}\theta\\=&\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{4}\times 4\\=&1\end{aligned}$$

3　已知向量场 $\boldsymbol{v}=\left(x^2-2yz,y^2-2xz,3z^2-2xy-1\right)$，判断：$\boldsymbol{v}$ 是否是一个保守场？若是，求出 $\boldsymbol{v}$ 的一个势函数。

解：易知 $\boldsymbol{v}$ 是定义在单连通区域 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场，又因为：

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}=&\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x^2-2yz&y^2-2xz&3z^2-2xy-1\\\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\end{vmatrix}\\=&\left(-2x+2x\right)\boldsymbol{i}+\left(-2y+2y\right)\boldsymbol{j}+\left(-2z+2z\right)\boldsymbol{k}\\=&\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{v}$ 是保守场。设 $\boldsymbol{v}$ 的一个势函数是 $\varphi(x,y,z)$，设 $\varphi(0,0,0)=C$，那么：

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=&\int_0^x\boldsymbol{v}(t,0,0)\cdot\boldsymbol{i}\mathrm{d}t+\int_0^y\boldsymbol{v}(x,t,0)\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}t+\int_0^z\boldsymbol{v}(x,y,t)\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{d}t+C\\=&\int_0^x t^2\mathrm{d}t+\int_0^y t^2\mathrm{d}t+\int_0^z\left(3t^2-2xy-1\right)\mathrm{d}t+C\\=&\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+z^3-2xyz-z+C\end{aligned}$$

4　计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是沿曲线 $x^2 = 2(y+2)$ 从点 $A\left(-2\sqrt{2}, 2\right)$ 到点 $B\left(2\sqrt{2}, 2\right)$ 的一段。

解：设区域 $D = \{(x,y) | y \leqslant 2 \wedge x^2 \leqslant 2(y+2)\}$，因为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = 0$$

所以 $\boldsymbol{v}(x,y) = \frac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{x^2+y^2}$ 是 $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ 的保守场，由 Stokes 定理，任取 $\epsilon \in (0,1)$：

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \left(\int\limits_{\partial(D\backslash B(O,\epsilon))} + \int\limits_{\partial B(O,\epsilon)} + \int\limits_{L_{AB}}\right)\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\
&= 0 + \int\limits_{\partial B(O,\epsilon)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - 2\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2^2} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta}{\epsilon^2} - 2\arctan\sqrt{2} \\
&= 2\pi - 2\arctan\sqrt{2}
\end{aligned}$$

5　设矢量 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，并记 $r = |\boldsymbol{r}|$，证明：

$$\iiint\limits_{\Omega} r^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{5}\iint\limits_{S} r^2 \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

其中 Ω 是由闭曲面 S 所包围的不含原点的空间区域，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位外法向。

证明：由 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\oiint\limits_{S} r^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S &= \frac{1}{5}\oiint\limits_{S} r^2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \frac{1}{5}\iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\left(r^2\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{5}\iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{5}\iiint\limits_{\Omega} \sum_{\text{cyc}}\left(3x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{\Omega} r^2\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

6　设 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ 是有界闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 为光滑曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向。设光滑函数 u 是 Ω 上的调和函数，且满足边界条件

$$\left[\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数。证明：u 在 Ω 上恒为零。

证明：由于有界闭区域上的调和函数最大值和最小值必定在边界上取到，所以：

不妨设在 $A \in \partial\Omega$ 处 u 取到最大值，也即 $u(A) = \max\limits_{\Omega} u$，那么必有 $\nabla u(A)$ 在 A 处与 $\partial\Omega$ 垂直且向外，于是 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \geqslant 0$，所以 $\max\limits_{\Omega} u \leqslant 0$；同理，$\min\limits_{\Omega} u \geqslant 0$，于是 $\max\limits_{\Omega} u = \min\limits_{\Omega} u = 0$. 所以 $u\big|_{\Omega} = 0$. □

15.11　中国科学技术大学 2013-2014 学年第二学期 数学分析 (B2) 第四次测验

1　论述：

(1)　有限闭区间 $[a,b]$ 上的可积且平方可积的函数一定是绝对可积的，这个命题是否成立？如成立，请证明；否则给出反例。

解：成立。

由 Cauchy 不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\xi_k\right)\right| \Delta x_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\xi_k\right) \Delta x_k} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}=\sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\xi_k\right) \Delta x_k}$$

又因为：

$$\sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]} ||f(x')|-|f(x'')|| \leqslant \sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]} |f(x')-f(x'')|$$

所以 f 在 $[a,b]$ 绝对可积。 □

(2)　把函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[1,2]$ 上按周期 1 进行 Fourier 展开，那么得到的 Fourier 级数收敛域是什么？在这个收敛域上级数是否一致收敛？这个级数在 $x=0$ 处的值是多少？

解：由 Dirichlet 收敛定理，$f(1)=1\neq f(2)=8$，所以 f 的 Fourier 级数收敛域是 $\mathbb{R}$，不一致收敛，在 $x=0$ 处值为 $\frac{1+8}{2}=\frac{9}{2}$.

2　设 $f(x)=|x|, x\in[-\pi,\pi]$.

(1)　把 f 延拓到整个直线上，成为周期为 2π 的函数，写出延拓后函数的定义。

解：

$$f(x)=2\pi\left\{\frac{x+\pi}{2\pi}\right\}-\pi, x\in\mathbb{R}$$

(2)　计算出 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开得到的 Fourier 级数。

解：由于 f 是偶函数，所以 $b_n=0$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & n=0\\ \frac{2(-1)^n-2}{\pi n^2}, & n\in\mathbb{N}_+\end{cases}=\begin{cases}\pi, & n=0\\ 0, & n=2k, k\in\mathbb{N}_+\\ -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}, & n=2k-1.k\in\mathbb{N}_+\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

(3)　上述 Fourier 级数是否收敛？若收敛，极限是什么？说明理由。

解：因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，所以收敛，在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 $2\pi\left\{\frac{x+\pi}{2\pi}\right\}-\pi$.

3 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导，f' 可积且平方可积，如果 $f(-\pi)=f(\pi)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty} nb_n=0$$

其中 a_n 和 b_n 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数。

证明：因为 f' 可积且平方可积，考虑 f' 的 Fourier 级数：

$$f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx\right)$$

由 Parseval 等式：

$$\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\mathrm{d}x$$

所以必有：

$$\lim_{n\to\infty} a_n'=\lim_{n\to\infty} b_n'=0$$

又因为当 $n\in\mathbb{N}_+$ 时：

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}\sin nx\\=&\frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\\=&-\frac{b_n'}{n}\end{aligned}$$

同理：

$$b_n=\frac{a_n'}{n}$$

所以：

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty} nb_n=0$$

4 考虑函数族：$N_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}, N_m(x)=\displaystyle\int_0^1 N_{m-1}(x-t)\mathrm{d}t, m\geqslant 2.$

(1) 证明：$N_m(x)=\underbrace{N_1(x)*N_1(x)*\cdots*N_1(x)}_{m\text{项}}$，其中 $*$ 表示卷积运算。

证明：因为：

$$N_m(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_{m-1}(x-t)N_1(t)\mathrm{d}t=N_{m-1}(x)*N_1(x)$$

所以：$N_m(x)=\underbrace{N_1(x)*N_1(x)*\cdots*N_1(x)}_{m\text{项}}$. □

(2) 给出 $N_m(x)$ 的 Fourier 变换 $F[N_m](\lambda)$.

证明：因为函数卷积的 Fourier 变换等于函数 Fourier 变换的乘积，也即有：

$$\begin{aligned}F[N_m](\lambda)&=\int_{-\infty}^{+\infty}N_m(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}N_{m-1}(x-t)N_1(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{-\infty}^{+\infty} N_1(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(x-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} N_1(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t+u)}\mathrm{d}u\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} N_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda u}\mathrm{d}u\\
&=F[N_1](\lambda)F[N_{m-1}](\lambda)\\
&=\cdots\\
&=F[N_1]^m(\lambda)\\
&=\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right)^m\\
&=\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{i}}-1\right)^m\frac{\mathrm{i}^m}{\lambda^m}
\end{aligned}
$$

(3)　当 $m\in\mathbb{N}_+$ 时，$F[N_m](\lambda)$ 经 Fourier 逆变换的结果是什么？请说明理由。

解：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[N_m](\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{\mathrm{i}^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}-1\right)^m\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{\lambda^m}\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{\mathrm{i}^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\lambda-1-\mathrm{i}\sin\lambda)^m\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{\lambda^m}\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{(-1)^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}}\right)^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{m}{2}+x\right)\lambda}}{\lambda^m}\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{(-1)^m}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}}\right)^m\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{m}{2}+x\right)\lambda}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{m}{2}+x\right)\lambda}\right)}{\lambda^m}\right)\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{(-2)^m}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^m\frac{\lambda}{2}\cos\frac{(2x+m)\lambda}{2}}{\lambda^m}\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

5　考虑函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}$，其中 $\beta>0,x>0$.

(1)　计算出 $f(x)$ 的 Fourier 正弦变换的表达式；

解：

$$
\begin{aligned}
G_O[f](\lambda)=&2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\sin\lambda x\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}}{\mathrm{i}}\mathrm{d}x\\
=&-\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda-\beta)x}-\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\lambda-\beta)x}\right)\mathrm{d}x\\
=&-\mathrm{i}\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\lambda-\beta}-\frac{1}{\mathrm{i}\lambda-\beta}\right)\\
=&\frac{1}{\lambda-\mathrm{i}\beta}+\frac{1}{\lambda+\mathrm{i}\beta}\\
=&\frac{2\lambda}{\lambda^2+\beta^2}
\end{aligned}
$$

(2) 利用上述结果，证明：当 $\alpha,\beta>0$ 时：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}$$

证明：因为由逆变换公式，有：

$$\mathrm{e}^{-\beta x}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}G_O[f](\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+\beta^2}\mathrm{d}\lambda$$

所以，当 $\alpha,\beta>0$ 时：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}$$

15.12　中国科学技术大学 2013-2014 学年第二学期 数学分析 (B2) 期末测验

1　简述下列各题：

(1) 计算 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $\boldsymbol{V}=\left(x^2+2y,z^3-2x,y^2+z\right)$ 的旋度和散度。

解：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x^2+2y&z^3-2x&y^2+z\end{vmatrix}=\left(2y-3z^2\right)\boldsymbol{i}-(2x+2y)\,\boldsymbol{k}$$

(2) 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2=4\,(x,y>0)$，$x^2+y^2=1\,(x,y>0)$ 与直线 $y=x$ 和 $x=0$ 所围成的区域。

解：

$$\iint_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2r\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\times\frac{3\pi^3}{32}=\frac{9\pi^2}{64}$$

2　已知螺旋面 S 的方程 $\begin{cases}x=u\cos v\\y=u\sin v\\z=v\end{cases}\quad(0\leqslant u\leqslant5,0\leqslant v\leqslant2\pi)$，试求：

(1) 过 S 上一点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ 的切平面方程。

解：因为 $\boldsymbol{r}(u,v)=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+v\boldsymbol{k}$，所以过 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的切平面的一个法向量为：

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\cos v&\sin v&0\\-u\sin v&u\cos v&1\end{vmatrix}=\sin v\boldsymbol{i}-\cos v\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}$$

因此过 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 的切平面为：

$$\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-v_0)=0$$

因此，过 $\boldsymbol{r}\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ 的切平面为：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+z-\frac{\pi}{3}=0$$

$$\iff\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+z=\frac{\pi}{3}$$

(2) 计算曲线积分 $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}l$，其中 L 是 S 上对应参数 $u=5$ 的曲线。

解：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}l &= \int_0^{2\pi} \frac{v^2}{25}\sqrt{25+1}\mathrm{d}v \\ &= \frac{\sqrt{26}}{50}\int_0^{2\pi} v^2\mathrm{d}v \\ &= \frac{4\sqrt{26}}{75}\pi^3\end{aligned}$$

3 试将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<|x|\leqslant \pi\end{cases}$ 展开成 Fourier 级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

解：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\pi=1$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}=\frac{\mathrm{i}^{n-1}\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}, & n=4k+1 \\ 0, & n=4k+2 \\ \frac{-2}{n\pi}, & n=4k+3 \\ 0, & n=4k+4\end{cases},k\in\mathbb{N}$$

$$b_n=0$$

$$\Longrightarrow f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)x}{2n-1}$$

由 Dirichlet 收敛定理：

$$1=f(0)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

4

(1) 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x$，其中常数 $b>a>0$.

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t$$

因为：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 对于 $t\in(0,+\infty)$ 内闭一致收敛，所以可以交换积分次序：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}\int_a^b\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\sqrt{b\pi}-\sqrt{a\pi}$$

(2) 利用 Euler 积分计算 $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解：

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1 8t\sqrt{1-t}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\
&=8\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\
&=8B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\\
&=8\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}\\
&=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

5　给定 $\mathbb{R}^3$ 中 n 个固定点 $M_i, i=1,2,\cdots,n$，考察向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\sum_{k=1}^n \mathrm{grad}\left(-\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\right)$$

其中 $\gamma_i>0$ 为正的常数，而 r_i 为点 $M(x,y,z)$ 到固定点 M_i 的距离。现在，已知光滑封闭曲面 S 所围成的区域的内部包含了这 n 个固定点。试求：$\boldsymbol{F}$ 穿过曲面 S 的流量。

解：由 Stokes 公式：

$$
\begin{aligned}
Q=&\oiint_S \nabla\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)\mathrm{d}S\\
=&-\sum_{k=1}^n\oiint_S \nabla\cdot\nabla\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\mathrm{d}S\\
=&-\sum_{k=1}^n\frac{\gamma_i}{4\pi}\oiint_S \Delta\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}\mathrm{d}S\\
=&\sum_{k=1}^n\frac{\gamma_i}{4\pi}\oiint_S\sum_{\mathrm{cyc}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x_i}{(\sum\limits_{\mathrm{cyc}}(x-x_i)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S\\
=&\sum_{k=1}^n\frac{\gamma_i}{4\pi}\oiint_S\sum_{\mathrm{cyc}}\frac{\sum\limits_{\mathrm{cyc}}(x-x_i)^2-3(x-x_i)^2}{(\sum\limits_{\mathrm{cyc}}(x-x_i)^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}S\\
=&0
\end{aligned}
$$

15.13　中国科学技术大学 2015-2016 学年第二学期 数学分析 (B2) 第三次测验

1　计算题：

(1)　求第二型曲线积分 $\oint_{L^+} y\mathrm{d}x+|y-x|\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$,其中 L^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 的交线，其方向为与 z 轴正向满足右手法则。

解：

$$
\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\frac{3}{4}\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}
$$

令：$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \end{cases}$,$\theta\in[0,2\pi]$ 是正向参数。于是：

$$\begin{aligned}
&\oint_{L^+} y\mathrm{d}x+|y-x|\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z \\
=&\int_0^{2\pi}-\frac{3}{4}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{3}{4}|\sin\theta-\cos\theta|\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
=&-\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}|\sin\theta-\cos\theta|\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
=&-\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

(2)　利用第二型曲线积分计算心脏线 $x=a(2\cos t-\cos 2t), y=a(2\sin t-\sin 2t)$ 所围成的平面图形的面积。

解：

$$\begin{aligned}
S=&\oint_{L^+} x\mathrm{d}y \\
=&a^2\int_0^{2\pi}(2\cos t-\cos 2t)\,\mathrm{d}(2\sin t-\sin 2t) \\
=&a^2\int_0^{2\pi}(2\cos t-\cos 2t)(2\cos t-2\cos 2t)\mathrm{d}t \\
=&a^2\int_0^{2\pi}\left(4\cos^2 t+2\cos^2 2t-6\cos t\cos 2t\right)\mathrm{d}t \\
=&a^2\int_0^{2\pi}\left(4\cos^2 t+2\cos^2 2t-3\cos 3t-3\cos t\right)\mathrm{d}t \\
=&6\pi a^2
\end{aligned}$$

(3)　求第二型曲面积分

$$\iint_{S^+}(f(x,y,z)+x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f(x,y,z)+y+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f(x,y,z)+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，S^+ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四象限部分的上侧。

解：令：$z=y-x+1, (x,y)\in(0,+\infty)\times(0,-\infty)$.

$$\begin{aligned}
&\iint_{S^+}(f(x,y,z)+x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f(x,y,z)+y+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f(x,y,z)+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint_{S^+}(f(x,y,z)+x,2f(x,y,z)+y+1,f(x,y,z)+z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
=&\iint_{S^+}(f(x,y,z)+x,2f(x,y,z)+y+1,f(x,y,z)+z)\cdot(1,-1,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint_{S^+}(x-y+z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&0
\end{aligned}$$

(4)　求第二型曲面积分 $\iint_{S^+}\left(x+y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y+z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S^+ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截部分的外侧。

解：设 $(x,y,z)=(\cos\theta,\sin\theta,z), (\theta,z)\in[0,2\pi]\times[0,3]$，且 (θ,z) 为正向参数。于是：

$$\iint_{S^+}\left(x+y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y+z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(\cos\theta+\sin^2\theta,\sin\theta+z^2,z+\cos^2\theta\right)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{vmatrix}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(\cos\theta+\sin^2\theta,\sin\theta+z^2,z+\cos^2\theta\right)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(1+\cos\theta-\cos^3\theta+z^2\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\
&=\int_0^3 2\pi\mathrm{d}z\\
&=6\pi
\end{aligned}
$$

(5) 求第二型曲面积分 $\displaystyle\oiint_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S^+ 是有界光滑闭曲面的外侧，并且原点不在 S^+ 上。

解：设 V 为 S 的内侧区域，易见：

$$\nabla\cdot\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

(1) 若原点在 S 外侧，那么：

$$\oiint_{S^+}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V=0$$

(2) 若原点在 S 内侧，那么取 $\delta>0$ 足够小，使得 $B(O,\delta)\subset V$，则有：

$$
\begin{aligned}
&\oiint_{S^+}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\oiint_{\partial(V\setminus B(O,\delta))}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oiint_{\partial B(O,\delta)}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iiint_{V\setminus B(O,\delta)}\nabla\cdot\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V+\oiint_{\partial B(O,\delta)}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}}{\delta^2}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\delta\cos\theta\cos\varphi&\delta\cos\theta\sin\varphi&-\delta\sin\theta\\-\delta\sin\theta\sin\varphi&\delta\sin\theta\cos\varphi&0\end{vmatrix}d\varphi\\
=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k})\cdot\left(\sin^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin^2\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}\varphi\\
=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi\\
=&\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\varphi\\
=&0
\end{aligned}
$$

综上所述，$\displaystyle\oiint_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$

2 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是常向量，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,1,1),\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$ 沿闭曲线 L^+ 的环量，其中 L_+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，其方向为与 z 轴正向满足右手法则。

解：设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

$$\oint_{L^+}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$
\begin{aligned}
&=\iint_S \nabla\times((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}S\\
&=\iint_S \nabla\times(b_1(a_1x+a_2y+a_3z),b_2(a_1x+a_2y+a_3z),b_3(a_1x+a_2y+a_3z))\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\iint_S a\times b\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S\\
&=\sqrt{3}\pi
\end{aligned}
$$

3　设 f,g 为有连续导数的函数，$f(0)=g(0)=1$，且向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(yf(x),f(x)+zg(y),g(y))$ 是保守场，求出 f,g 以及向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的势函数。

解：

$$
\boldsymbol{0}=\nabla\times\boldsymbol{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ yf(x)&f(x)+zg(y)&g(y)\end{vmatrix}=(g'(y)-g(y))\boldsymbol{i}+(f'(x)-f(x))\boldsymbol{k}
$$

$$
\Longleftrightarrow\begin{cases}f'(x)=f(x)\\ g'(x)=g(x)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f(x)=\mathrm{e}^x\\ g(x)=\mathrm{e}^x\end{cases}\Longrightarrow\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x+z\mathrm{e}^y,\mathrm{e}^y)
$$

所以，$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的势函数为：

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z)=&\int_0^y \mathrm{e}^x\mathrm{d}t+\int_0^z \mathrm{e}^y\mathrm{d}t+C\\
=&y\mathrm{e}^x+z\mathrm{e}^y+C
\end{aligned}
$$

4　设函数 $\varphi(x)$ 有连续的导数，在围绕原点的任意逐段光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分

$$
\oint_{L^+}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}
$$

的值为常数。

(1)　设 L^+ 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$，在不求出 $\varphi(x)$ 的情况下，求 $\oint_{L^+}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解：设 L_1,L_2 分别是 L 在第一、第四象限的部分，于是：

$$
\begin{aligned}
&\oint_{L^+}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}\right)\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\
=&\int_{L_1}\left(\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+\frac{-2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}(-y)}{x^4+y^2}\right)\\
=&0
\end{aligned}
$$

(2)　求函数 $\varphi(x)$.

解：因为对于任意曲线积分都是常数，所以是 $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0)\}$ 的保守场。因此：

$$
0=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{x^4+y^2}=\frac{(\varphi'(x)-2x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)+4xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}
$$

$$
\Longrightarrow\varphi'(x)-\frac{4x^3}{x^4+y^2}\varphi(x)+\frac{4xy^2}{x^4+y^2}-2x=0
$$

(3) 设 C^+ 是围绕原点的正向光滑简单闭曲线，求 $\displaystyle\oint_{C^+}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$

15.14 中国科学技术大学 2015-2016 学年第二学期 数学分析 (B2) 第四次测验

1 判断下列积分是否收敛：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x.$

解：因为 $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\sim x^{-\frac{3}{2}}\ (x\to+\infty)$，所以绝对收敛。

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}(\ln x)^2\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解：设 $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}, f'(x)=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$，于是 $x\geqslant \mathrm{e}^2$ 时 $f(x)$ 单调递减，又因为 $\frac{\ln^2 x}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$，且 $\left|\displaystyle\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|<2$，所以由 Dirichlet 判别法知，积分收敛。

2 证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(6k+1)x}{6k+1}-\frac{\cos(6k+5)x}{6k+5}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\frac{\pi}{3}\\ 0, & x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}$

证明：考虑 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3}}, & x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\\ \frac{1}{4\sqrt{3}}, & x=\frac{\pi}{3}\\ 0, & x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\\ -\frac{1}{4\sqrt{3}}, & x=\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}, & x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}$ 的 Fourier 余弦级数：

$$a_0=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{3}\pi n}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=6k+1\\ 0, & n=6k+2\\ 0, & n=6k+3\\ 0, & n=6k+4\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=6k+5\end{cases},k\in\mathbb{N}$$

由 Dirichlet 收敛定理：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(6k+1)x}{6k+1}-\frac{\cos(6k+5)x}{6k+5}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\frac{\pi}{3}\\ 0, & x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}\quad\square$$

3 判断下列积分是否关于 $u>0$ 一致收敛：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}\mathrm{d}x$.

解：当 $u>0$ 时，易知：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{ux}\mathrm{d}(ux)=\frac{\pi}{2}$. 因为 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$，所以：

$$\sup_{u>0}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}\mathrm{d}x\right|=\sup_{u>0}\left|\int_{uA}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\geqslant\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\frac{\pi}{2}>0,\ \forall A>0$$

所以，不一致收敛。

4 计算：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$.

解：我们使用积分因子法，设 $a\geqslant 0$，考虑积分：

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-(a+1)x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$$

因为：

$$\left|\int_0^A\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\cos x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\left(2-\mathrm{e}^{-A}\right)\sin A+\mathrm{e}^{-A}\cos A-1\right|$$

对于 $\forall A>0$ 一致有界，且：$\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}$ 对于 $a\geqslant 0$ 单调递减一致趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知 $I(a)$ 在 $a\geqslant 0$ 一致收敛，于是连续。又因为：

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-(a+1)x}}{x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^{a+1}\mathrm{e}^{-tx}\cos x\mathrm{d}t$$

由 Dirichlet 判别法，易知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\cos x\mathrm{d}x$ 在 $t\geqslant\delta>0$ 时一致收敛，也即在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛，所以当 $a>0$ 时：

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_a^{a+1}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\cos x\mathrm{d}x\\&=\int_a^{a+1}\frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_a^{a+1}\frac{\mathrm{d}\left(t^2\right)}{t^2+1}\\&=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{(a+1)^2}\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\\&=\frac{\ln\left((a+1)^2+1\right)-\ln\left(a^2+1\right)}{2}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\mathrm{d}x=I(0)=\lim_{a\to 0^+}I(a)=\lim_{a\to 0^+}\frac{\ln\left((a+1)^2+1\right)-\ln\left(a^2+1\right)}{2}=\frac{\ln 2}{2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)-\ln\left(1+b^2x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：设 $a\in[0,A]$，设积分：

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a\frac{2t}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{a^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t}$$

一方面：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)}{x^2}=a^2$；另一方面：$\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调递减对于 a 一致趋于 0，且 $\exists C(A)$，使得：

$$\left|\int_1^B\frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_1^B\frac{\ln\left(1+A^2x^2\right)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\right|<C(A)$$

因此由 Dirichlet 判别法知 $I(a)$ 在 $a\in[0,A]$ 上一致收敛，因此连续。于是，$J(a,b)=I(a)-I(b)$ 连续。不妨设 $a\geqslant b>0$，则：

$$J(a,b)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{b^2}^{a^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t}$$

因为当 $b^2\leqslant t\leqslant a^2$ 时，$\displaystyle\int_0^D\left|\frac{1}{1+x^2t}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^D\frac{\mathrm{d}t}{1+\delta x^2}=\frac{\arctan(bD)}{b}<\frac{\pi}{2b}$，所以在 $\left[b^2,a^2\right]$ 一致收敛，可以交换积分次序，于是：

$$J(a,b)=\int_{b^2}^{a^2}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2t}=\int_{b^2}^{a^2}\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\pi(a-b)$$

由连续性：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)-\ln\left(1+b^2x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\pi\left(|a|-|b|\right)$$

5

(1)　证明：$\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2u}{u^2}\cos(2ux)\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & x>1\end{cases}$

证明：设 $f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}x, & x\in[0,2]\\ 0, & x>2\end{cases}$，对其做偶延拓，于是：

$$F_e[f](u)=2\int_0^2\left(1-\frac{x}{2}\right)\cos ux\mathrm{d}x=\frac{2-2\cos 2u}{2u^2}=\frac{2\sin^2u}{u^2}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2u}{u^2}\cos(ux)\mathrm{d}u=\begin{cases}1-\frac{1}{2}x, & x\in[0,2]\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2u}{u^2}\cos(2ux)\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & x>1\end{cases}\qquad\square$$

证明：因为 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin^2u}{u^2}\cos(2ux)\right|\mathrm{d}u<\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=1$，且 $\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\sin^2u}{u^2}=1$，$|\cos(2ux)|\leqslant1$，所以由 Weierstrass 判别法知原含参反常积分对于 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛，于是连续。又因为当 $x\geqslant0$ 时：

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1-\cos 2u}{2u^2}\cos(2ux)\mathrm{d}u\\
=&\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(\cos 2ux-1)\sin(2ux)}{u}\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u(x+1))}{u}\mathrm{d}u+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u(x-1))}{u}\mathrm{d}u-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2ux)}{u}\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u(x-1))}{u}\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x-1)-\frac{1}{2}\\
=&\begin{cases}-1, & x\in[0,1)\\ -\frac{1}{2}, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}
\end{aligned}$$

且当 $x=0$ 时，原式等于 1，所以：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cos(2ux)\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & x>1\end{cases}\qquad\square$$

(2) 计算：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x.$

解：注意到：$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，所以 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(\sin 3x-3\sin x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}\\ =&\frac{\sin 3x-3\sin x}{4x^2}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}\mathrm{d}x\\ =&\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}(\cos 3x-3\cos x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x}\\ =&\frac{3\cos 3x-3\cos x}{4x}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{9}{4}\int_0^{+\infty}\frac{3\sin 3x-\sin x}{x}\mathrm{d}x\\ =&\frac{9}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\\ =&\frac{9\pi}{4}\end{aligned}$$

6 计算极坐标下曲线 $r^4=\sin^5\theta\cos^3\theta$ 所围成的区域的面积。

解：易知，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$，由 Green 公式以及对称性：

$$\begin{aligned}S=&\iint_S\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{2}\oint_{L^+}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{2}\oint_{L^+}(-y,x)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-r\sin\theta,r\cos\theta)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin^{\frac{9}{4}}\theta,\cos^{\frac{7}{4}}\theta\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\sin^{\frac{1}{4}}\theta\cos^{\frac{11}{4}}\theta-\frac{7}{4}\sin^{\frac{9}{4}}\theta\cos^{\frac{3}{4}}\theta,\frac{9}{4}\sin^{\frac{5}{4}}\theta\cos^{\frac{7}{4}}\theta-\frac{3}{4}\sin^{\frac{13}{4}}\theta\cos^{-\frac{1}{4}}\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(7\sin^{\frac{9}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{4}}\theta-5\sin^{\frac{5}{2}}\theta\cos^{\frac{11}{4}}\theta+9\sin^{\frac{5}{4}}\theta\cos^{\frac{7}{2}}\theta-3\sin^{\frac{13}{4}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{7B\left(\frac{11}{4},\frac{7}{8}\right)-5B\left(\frac{7}{4},\frac{15}{8}\right)+9B\left(\frac{9}{8},\frac{9}{4}\right)-3B\left(\frac{17}{8},\frac{5}{4}\right)}{8}\end{aligned}$$

7 计算 e^{-x^2} 的 Fourier 变换。

解：

$$F[f](\lambda)=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos\lambda x\mathrm{d}x\triangleq I(\lambda)$$

因为 $I(a)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos ax\mathrm{d}x<\sqrt{\pi}$，所以一致收敛，所以连续。考虑积分：

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{e}^{-x^2}\cos ax\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\sin ax\mathrm{d}x$$

因为 $\int_0^{+\infty}\left|xe^{-x^2}\sin ax\right|dx<\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}$，所以由 Weierstrass 判别法知 $I'(a)$ 一致收敛，于是：

$$
\begin{aligned}
I(a)=&2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos ax\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{a}e^{-x^2}\sin ax\Big|_0^{+\infty}+\frac{4}{a}\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin ax\mathrm{d}x\\
=&\frac{4}{a}\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin ax\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow I'(a)+\frac{a}{2}I(a)=0,I(0)=\sqrt{\pi}$$

$$\Longrightarrow I(a)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}$$

$$\Longleftrightarrow F[f](\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

15.15　中国科学技术大学 2016-2017 学年第二学期 数学分析 (B2) 期末测验

1

(1)　设 $z=f(x,y),x=u^2+2v^2,y=ue^v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$.

解：利用 Jacobi 矩阵：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}e^v & 4\frac{\partial f}{\partial x}v+\frac{\partial f}{\partial y}ue^v\end{pmatrix}$$

(2)　求方程组 $x=\cos v+u\sin v,y=\sin v-u\cos v$ 所确定的反函数组的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解：

$$\begin{cases}x=\cos v+u\sin v\\ y=\sin v-u\cos v\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}1=-\sin v\frac{\partial v}{\partial x}+\sin v\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\cos v\frac{\partial v}{\partial x}-\cos v\frac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=-\sin v\frac{\partial v}{\partial y}+\sin v\frac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\\ 1=\cos v\frac{\partial v}{\partial y}-\cos v\frac{\partial u}{\partial y}+u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\sin v & -\sin v+u\cos v\\ -\cos v & \cos v+u\sin v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}\cos v+u\sin v & \sin v-u\cos v\\ \cos v & \sin v\end{pmatrix}$$

2　设 $a_j>0,b_j>0\,(j=1,2,\cdots,n)$.

(1)　用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^n b_kx_k^2$ 在条件 $\sum\limits_{k=1}^n a_kx_k=1$ 之下的极值。

解：因为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$，所以易知，只存在极小值。

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k=1\\ 2b_1x_1=\lambda a_1\\ 2b_2x_2=\lambda a_2\\ \vdots\\ 2b_nx_n=\lambda a_n\end{cases}\implies \forall k=1,2,\cdots,n,\ x_k=\frac{\lambda a_k}{2b_k},\lambda>0$$

代入 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_kx_k=1$ 得：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}=\frac{2}{\lambda}\iff\lambda=\frac{2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}}$$

于是，取极值时，有：

$$x_k=\frac{a_k}{b_k\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}}$$

此时，极值为：

$$f_{\min}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{a_k^2}{b_k^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\right)^2}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}}$$

(2)　由 (1) 的结论证明不等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2$.

证明：令 $y_k=\frac{x_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}$，于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_ky_k=1$. 由 (1) 知：

$$\sum_{k=1}^{n}b_ky_k^2\geqslant\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}}$$

$$\iff\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2}\geqslant 1$$

$$\iff\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2$$

3　设 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，且曲线积分 $\oint_C(\mathrm{e}^x+f(x))\,y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径 C 无关。求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))\,y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$.

解：由题意得常微分方程：

$$\begin{cases}f'(x)=\mathrm{e}^x+f(x)\\ f(0)=0\end{cases}\implies f(x)=x\mathrm{e}^x$$

于是：

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))\,y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=\left(\int_{(0,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}\right)(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)\,y\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\mathrm{e}$$

4　设 $a,b,c>0$，求第二型曲面积分 $\iint_S \left(by^2+cz^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(cz^2+ax^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(ax^2+by^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$ 的上侧。

解：由 Gauss 公式：

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \left(by^2+cz^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(cz^2+ax^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(ax^2+by^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iiint_{B(O,1)\cap\{z\geqslant 0\}} \nabla\cdot\left(by^2+cz^2,cz^2+ax^2,ax^2+by^2\right)\mathrm{d}V+\iint_{\{x^2+y^2\leqslant 1,z=0\}}\left(ax^2+by^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(ar^2\cos^2\theta+br^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{(a+b)\pi}{4}
\end{aligned}
$$

5　设 a,b,c 不全为零，L 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 与平面 $\Sigma: ax+by+cz=0$ 的交线，其方向这样来定：质点在 L 上运动的正方向与平面 Σ 的法向 (a,b,c) 成右手系。计算第二型曲线积分 $\oint_L (bz+c)\mathrm{d}x+(cx+a)\mathrm{d}y+(ay+b)\mathrm{d}z$.

解：由 Stokes 公式：

$$
\begin{aligned}
&\oint_L (bz+c)\mathrm{d}x+(cx+a)\mathrm{d}y+(ay+b)\mathrm{d}z\\
=&\iint_S \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ bz+c & cx+a & ay+b\end{vmatrix}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&\iint_S (a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
=&0
\end{aligned}
$$

6

(1)　求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数。

解：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以：

$$
b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x=\frac{2\left(1-(-1)^2\right)}{n\pi}=\begin{cases}\frac{4}{n\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases},k\in\mathbb{N}_+
$$

$$
\Longrightarrow\ f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}
$$

(2)　求级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解：因为 Fourier 级数可以逐项积分，所以，设 $x\in[0,\pi]$，于是：

$$
x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\int_0^x\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1-\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}
$$

所以：

$$
\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}\iff\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}
$$

(3)　由 (1) 的结论求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的和。

解：因为：

$$x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

所以，当 $x\in[0,\pi]$ 时：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}x$$

7　证明：含参变量的广义积分 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\mathrm{d}x$ 定义的函数 $F(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可导函数。

证明：我们只需证明积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛即可。因为：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+tx)}\mathrm{d}x$$

因为由 Dirichlet 积分，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，对 t 一致收敛，又 $\frac{1}{1+tx}$ 单调递减对 t 一致有界，所以由 Abel 判别法，一致收敛。于是：

$$F'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+tx)}\mathrm{d}x$$

在 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛。所以 $F(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 可导。 □

8　设 D 是由光滑封闭曲线 L 所围成的区域，函数 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数，且满足：$\mathrm{e}^y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，并且 f 在 L 上恒为零。

(1)　求证：存在有连续偏导数的函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,\ (x,y)\in D$$

证明：取 $P(x,y)=-\mathrm{e}^x f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y},Q(x,y)=\mathrm{e}^y f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}$，于是：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^x f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^y f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\mathrm{e}^x f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

因此存在。 □

(2)　证明：f 在 D 上恒为零。

证明：由 Green 公式：

$$\begin{aligned}0&\leqslant\iint_D\left(\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\oint_L -\mathrm{e}^x f\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y f\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\\
&=0
\end{aligned}
$$

因为 f,P,Q 有连续的偏导数，所以取等当且仅当 $\forall(x,y)\in\overline{D},\nabla f=0$，因此，$\forall(x,y)\in\overline{D},f(x,y)=f\big|_L=0$. □

15.16 中国科学技术大学 2019-2020 学年第二学期 数学分析 (B2) 期末测验

若 f 在 $U=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$ 上有二阶连续偏导数，且满足：$\Delta f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求积分：$\iiint_U\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(1)　对于正交方阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，若 $\mathbb{R}^2$ 上有：$u=ax+by,v=cx+dy$，求证：对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意有连续的二阶偏导数的函数 f，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

(2)　对于 $\mathbb{R}^2$ 上的有二阶连续偏导数的函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ 是雅可比矩阵，且对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意具有二阶连续偏导数的函数 f 有：$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$. 求证：$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ 是常正交方阵。

第十六章　外校试题

16.1　2019-2020 春季学期清华大学微积分 (A2) 期末试题

1　已知 $y=y(x), z=z(x)$ 是方程组 $\begin{cases} x^3+y^3-z^3=10 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 附近确定的隐函数，求 $y=y(x), z=z(x)$ 在 $x_0=1$ 点处的导数 $y'(1), z'(1)$.

解：因为 $(1,1,-2)$ 处，上方程组中每个方程中 x 的偏导非零，所以有隐函数。对 x 求微分：

$$\begin{cases} 3+3y'(1)-12z'(1)=0 \\ 1+y'(1)+z'(1)=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y'(1)=-1 \\ z'(1)=0 \end{cases}$$

2　设 $f\in C^2(\mathbb{R}), z=f\left(x^2+xy+y^2\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(1,1)$ 处的值.

解：记 $u(x,y,z)=x^2+xy+y^2$，则 $z=f(u(x,y,z))$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}=f'\left(x^2+zy+y^2\right)(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u(x,y,z))\,(x+2y)\right)=(x+2y)f''(x^2+xy+y^2)(2x+y)+f'(x^2+xy+y^2)$$

因此：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3f'(3),\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=9f''(3)+f'(3)$$

3　求 $u=(\sin x)(\sin y)(\sin z)$ 在约束条件 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ $(x>0, y>0, z>0)$ 下的极值，并说明所求的是极值是极大值还是极小值.

解：使用 Lagrange 乘数法：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\sin y\sin z=\lambda \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y\sin x\sin z=\lambda \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\cos z\sin x\sin y=\lambda \\ x+y+z=\dfrac{\pi}{2} \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases}$$

因为 $x,y,z>0$，所以将 (1)(2)(3) 式互相相除，得：$\tan x=\tan y=\tan z$，所以极值点为：$x_0=y_0=z_0=\dfrac{\pi}{6}$.
因为 $u(x,y,z)$ 有下确界 0，无最小值，所以所求只可能是极大值，下面进行验证：

当满足限制条件 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$u(x,y,z)=\sin x\sin y\cos(x+y)\triangleq\varphi(x,y)$.

$$\varphi(x,y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}\cos(x+y)\leqslant\frac{1-\cos(x+y)}{2}\cos(x+y)\leqslant\frac{1}{8}$$

当且仅当 $x=y=\dfrac{\pi}{6}$ 时取等。因此是极大值. □

4　计算 $\displaystyle\iint\limits_D \left|\frac{y}{x}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\right\}$.

解：

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left|\frac{y}{x}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\left|\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right|r\mathrm{d}r\\ =&2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}r\mathrm{d}r\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)\mathrm{d}\theta\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2\sin2\theta-\tan\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{3}{2}+\ln\cos\frac{\pi}{3}\\ =&\frac{3}{2}-\ln2\end{aligned}$$

5　设 $D=\{(x,y)|x>0\}$

(1)　若 $A,B\in D$，L 为 D 内连接 A,B 两点的逐段光滑曲线，问 $\displaystyle\int_{L(A)}^{L(B)}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$ 是否与路径 L 有关？说明理由.

解：因为 $\boldsymbol{v}(x,y)=\dfrac{y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}}{x^2+2y^2}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 在 D 中均有定义，D 曲面单连通，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-2y^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2}+\dfrac{2y^2-x^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2}=0$，因此 $\boldsymbol{v}$ 是保守场，积分与路径无关.

(2)　是否存在二元函数 $z=z(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}z=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$？若存在，求 $z(x,y)$；若不存在，说明理由.

解：因为 $\boldsymbol{v}$ 是保守场，所以存在势函数 $z(x,y)$。设 $z(1,0)=C$，那么：

$$z(x,y)=\int_1^x\frac{0\mathrm{d}t}{t^2+0}-\int_0^y\frac{x\mathrm{d}t}{x^2+2t^2}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}y}{x}+C$$

因此，对于 $\forall C\in\mathbb{R},z(x,y)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\sqrt{2}y}{x}+C$ 均是符合要求的函数.

6　求 $\displaystyle\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant1\right\}$.

解：

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&\int_0^1r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sqrt{1-r^3}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ =&4\pi\int_0^1\sqrt{1-r^3}r^2\mathrm{d}r\\ =&\frac{4}{3}\pi\int_0^1\sqrt{1-r}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$=\frac{8}{9}\pi$$

7　设 $a>1$，有向曲线 $L^+:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax\\x^2+y^2=2x\end{cases}\quad(z\geqslant 0)$，从 z 轴正向看去，为逆时针方向，求 $\displaystyle\int_{L^+}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$.

解：设 $L_1=L^+\cap\{(x,y,z)|y\leqslant 0\},L_2=L^+_{\cap}\{(x,y,z)|y\geqslant 0\}$，$L_1,L_2$ 与 L 定向相同。因为 L^+ 关于 xOz 平面对称，所以：

$$\int_{L^+}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x=\int_{L_1}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\int_{L_2}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x=\left(\int_{L_1}-\int_{L_1}\right)\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x=0$$

同理，$\displaystyle\int_{L^+}\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y=\int_{L^+}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z=0$，于是 $\displaystyle\int_{L^+}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z=0$.

8　设 2π 周期函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant 0\\x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$

(1)　求 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

解：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x=\left.\frac{nx\sin nx+\cos nx}{\pi n^2}\right|_0^\pi=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x=\left.\frac{\sin nx-nx\cos nx}{\pi n^2}\right|_0^\pi=-\frac{(-1)^n}{n}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx-\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$$

(2)　利用 (1) 的结论求级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解：因为 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 连续，所以 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛到 $f(0)=0$，也即：

$$\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\pi(2n-1)^2}=0\iff\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

9　设 $\Omega\in\mathbb{R}^3$ 是包含原点的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 是 C^1 类光滑正则曲面，记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 求证：

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}S=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$$

其中 $\Omega_\varepsilon=\left\{(x,y,z)\in\Omega\,\middle|\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\varepsilon\right\}$，$\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 与 $\partial\Omega$ 的单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角。

证明：

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\xlongequal{\text{Gauss}}\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial B(O,\varepsilon)}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varepsilon\sin\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}V+2\pi\varepsilon\\
&=\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}V}{r}+2\pi\varepsilon
\end{aligned}
$$

因为：

$$\iiint\limits_{B(O,\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{r}=\int_0^{\varepsilon}r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\varepsilon^2$$

所以 $(0,0,0)$ 不是瑕点，因此可以取 $\varepsilon\to 0^+$，即得：

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}S=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$$

10　设 $a_n\geqslant 0,n\in\mathbb{N}$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$ 收敛，记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 求证：

(1)　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$.

证明：因为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!y^n$ 在 $y=1$ 处收敛，所以 $\forall y:|y|<1$，均收敛。反设收敛半径 $R\in\mathbb{R}$，那么：任取 $x_0>R$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=+\infty$. 任取 $y_0\in(0,1)$，因为 $x_0^n=o\left(n!\right)$，所以 $\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,n!y_0^n\geqslant x_0^n$，那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!y_0^n=+\infty$，矛盾！因此收敛半径 $R=+\infty$. □

(2)　反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!$. (提示：考虑 $\mathbb{N}_+$ 上的 Gamma 函数)

证明：因为 $R=+\infty$，所以有限区间积分与级数求和可以交换顺序：

$$\forall M>0,\int_0^{M}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{M}\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{M}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x$$

因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=\Gamma(n+1)=n!$，所以 $\displaystyle\forall M>0,\int_0^{M}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!$，因为正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且收敛到 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!$. □

附加题　设 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$

(1)　证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ 关于 x 在区间 $[0,2\pi]$ 上收敛，但不一致收敛。

证明：当 $x\in[a,b]\subset(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 时，$\left|\sum\limits_{k=1}^{N}\sin(kx)\right|=\left|\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2N+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\leqslant M_{a,b}$，又 $\dfrac{1}{n^p}$ 对于 x 单调递减一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法，在 $[a,b]$ 一致收敛。由 $[a,b]\subset(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$，知在 $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 收敛。又 $x=0,\pi,2\pi$ 时级数为 0，所以在 $[0,2\pi]$ 收敛.

又因为 $p \leqslant \frac{1}{2}$，任取 $N \in \mathbb{N}_+$ 足够大，取 $m > 2N, n = \left[\frac{m}{2}+1\right] \leqslant \dfrac{3m}{4}$，取 $x = \dfrac{\pi}{2m}$，所以 $\forall k = n, n+1, \cdots, m, nx \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$，于是：

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin(kx)}{k^p} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^p} > \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{n+1}^{m} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{3m}{4}}^{m} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{m^{1-p}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1-p}\right)}{\sqrt{2}(1-p)}$$

因为 $1-p>0$，所以 $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{m} \dfrac{\sin\left(k\frac{\pi}{2m}\right)}{k^p} = +\infty$，由 Cauchy 收敛准则知不一致收敛. □

(2) 判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ 是否为某个连续地 2π 周期函数的 Fourier 级数？说明理由。

解：假设是的，由 Parseval 等式知：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$，收敛。但是 $2p \leqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2p}} = +\infty$，矛盾！因此不是。