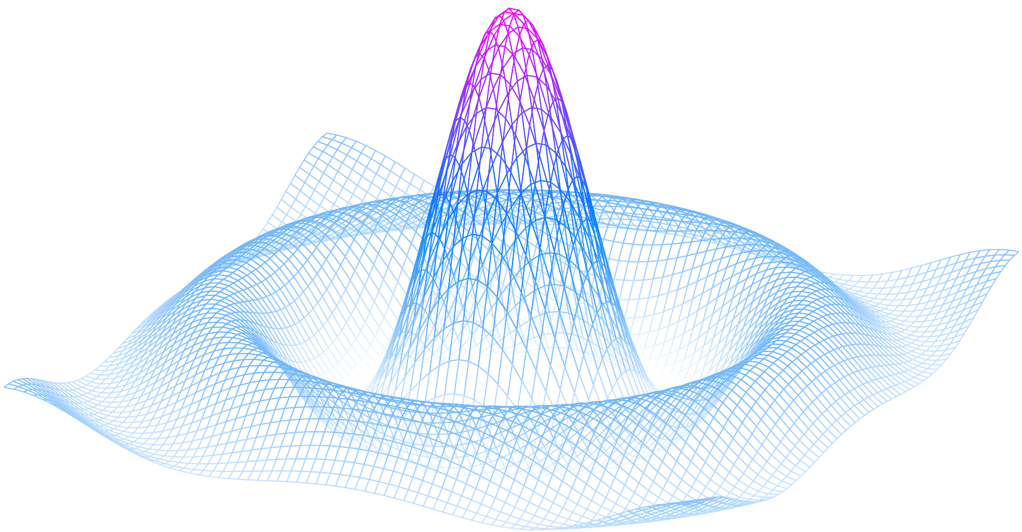
微分方程 I 笔记



吴越
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
pilotjohnwu@mail.ustc.edu.cn

最后编辑日期: 2021 年 4 月 21 日

目录

第一部分

常微分方程

第一章　常微分方程的初等解法

1.1　基本概念

定义 1.1.1: 微分方程

含有未知函数的导数或偏导数的关系是成为微分方程。

若未知函数为一元的，则称为常微分方程 (ODE)；若为多元，则称为偏微分方程 (PDE)。

常微分方程的一般形式

$$F\left(t, x, x', \cdots, x^{(n)}\right) = 0, n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

其中 n 为上述方程的**阶数**。

定义 1.1.2: 线性常微分方程

当微分方程1.1具有形式

$$F = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{(k)}(t) + b(t) \tag{1.2}$$

时，称为线性的；否则，称为非线性的。

例 1.1: 微分方程的几个例子

1. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\cos t = 0$ 为一阶线性 ODE，其中记 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x' = \dot{x}$
2. $x''x' + x^2 = 0$ 为二阶非线性 ODE
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$(二维 Laplace 方程) 为二阶线性 PDE

定义 1.1.3: 若 $x = \varphi(t)$ 在区间 I 上 n 阶光滑 (记为 $\varphi(t) \in C^n(I)$) 且 $\varphi(t)$ 满足方程1.1，则称 $x = \varphi(t)$ 为方程1.1在 I 上的经典解，I 为解的定义区间。

在 Oxy 平面上，$x = \varphi(t)$ 表示为一条光滑曲线，称为一条积分曲线。

定义 1.1.4: 若方程1.1的解 $x = \varphi(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 包含 n 个独立的任意常数 C_i，则称 $x = \varphi(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 为1.1的通解；若不包含任何任意常数，则称为1.1的特解。

定义 1.1.5: 独立的任意常数

称方程1.1的解 $x = \varphi(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 中的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是的独立的任意常数，当且

仅当 φ 的 Jacobian 恒不为零，也即：

$$\frac{\partial\left(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}\right)}{\partial\left(C_1,C_2,\cdots,C_n\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.3}$$

注记 1.1.1: 方程1.1存在非特解也非通解的解，例如奇解。

定义 1.1.6: 初值问题/Cauchy 问题

定义了初始值 $x(t_0),x'(t_0),\cdots,x^{(n)}(t_0)$ 的方程1.1的求解问题，称作初值问题/Cauchy 问题。

例 1.2: 考虑自由落体过程：$m\ddot{x}=-mg,m>0$，化为 $\ddot{x}=-g$，积分两次得：

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.4}$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。于是，当给定了初始位移和初始速度：

$$\begin{cases}x(t_0)=x_0\\ x'(t_0)=v_0\end{cases} \tag{1.5}$$

时，可以得到：

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0 \tag{1.6}$$

称作二阶线性常微分方程的初值问题，或 Cauchy 问题。

定义 1.1.7: 方向场/线素场

对于一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) \tag{1.7}$$

设 $f(t,x)$ 在 D 上有定义，过 D 内任意一点 $P(t,x)$ 作一条以 $f(t,x)$ 为斜率的直线，且把向量 $\mathbf{r}(t,x)=(1,f(t,x))$ 构成的一个向量场称为方程1.7确定的一个方向场/线素场，以这个方向场/线素场中的方向为切向所作出的曲线，就是积分曲线。

定义 1.1.8: 方向场中具有同一方向 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k$ 的点的轨迹成为方程1.7的等斜线或等倾线。

等斜线的方程为 $f(t,x)=k$，是一个隐函数。

在这条等斜线上的各点处：$\lambda\mathbf{r}^{(0)}=\frac{\lambda}{\sqrt{1+k^2}}(1\mathbf{i}+k\mathbf{j})$，其中 $\lambda>0$ 且 $|\lambda|$ 很小。

方向场画法 适当画出若干条等斜线，再在每条等斜线上适当地选取若干个点，画出对应的向量 $\lambda\mathbf{r}^0$ 即可。

例 1.3: 产品的销售模型

设 $x(t)$ 是 t 时的产品销量，$N>0$ 是市场容量，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sim x(t),\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sim N-x(t)$(正比关系)，设 $k>0$ 为比例系数，列出方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(t)\left(N-x(t)\right) \tag{1.8}$$

使用分离变量法，变形为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)} = k\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

积分得：

$$x(t) = \frac{N}{1+C\mathrm{e}^{-kNt}} \tag{1.10}$$

于是我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(N-2x) \tag{1.11}$$

令上式等于 0，得：当 $x=\frac{N}{2}$ 时，销售速度最快，且销售速度先增后减。

例 1.4: 传染病模型

1. 已感染人数 $i(t)$，假设每人每天有效 (足以致病) 接触人数 λ，建模：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \implies i(t) = i_0\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{1.12}$$

   于是：$\lim\limits_{t\to+\infty} i(t) = +\infty$.

2. (IS 模型) 区分已感染和未感染的人数占比 $i(t), s(t), i+s=1$，每个病人每天有效接触人数 $\lambda>0$，建模：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

   称作 Logistic 方程，解为：

$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}} \tag{1.14}$$

3. (SIS 模型) 区分感染和未感染比例 $i(t), s(t), i+s=1$，病人每天治愈比例 μ，可以反复感染。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda i(1-i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \tag{1.15}$$

   设 $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$，于是化为：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\lambda i\left(i-\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

   此时：

$$i(+\infty) = \begin{cases} 1-\frac{1}{\sigma}, & \sigma > 10, 0 \leqslant \sigma \leqslant 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

4. (ISR 模型) 人群分为感染者、健康者和不再感染者，建模：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda si - \mu i \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, i_0 + s_0 \approx 1 \end{cases} \tag{1.18}$$

该方程难以解出解析解。令 $\sigma=\frac{\lambda}{\mu}$，得出 i 和 s 的关系：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sigma s}-1\\ i\big|_{s=s_0}=i_i\end{cases}\tag{1.19}$$

解出相轨线：

$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}\tag{1.20}$$

易知：$i(+\infty)=0$，则 $s(+\infty)$ 满足：

$$s_0+i_0-s(+\infty)+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s(+\infty)}{s_0}=0\iff\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s(+\infty)}{s_0-s(+\infty)},\ (i_0\approx 0)\tag{1.21}$$

由相轨线知：当 $s_0>\frac{1}{\sigma}$ 时，$i(t)$ 先升后减；当 $s_0\leqslant\frac{1}{\sigma}$ 时，$i(t)$ 单调递减。

5. Reconstruction of the full transmision dynamics of COVID-19 in Wuhan, *Nature* 584,420-424(2020)

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=n-\frac{bS(\alpha P+\alpha A+I)}{N}-\frac{nS}{N} & (1.22)\\ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{bS(\alpha P+\alpha A+I)}{N}-\frac{E}{D_e}-\frac{nE}{N} & (1.23)\\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{D_e}-\frac{P}{D_p}-\frac{nP}{N} & (1.24)\\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{(I-r)P}{D_p}-\frac{A}{D_i}-\frac{nA}{N} & (1.25)\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{rP}{D_p}-\frac{l}{D_i}-\frac{I}{D_q} & (1.26)\\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{I}{D_q}-\frac{H}{D_h} & (1.27)\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\frac{A+I}{D_i}+\frac{H}{D_h}-\frac{nR}{N} & (1.28)\end{cases}$$

1.2 一阶方程的初等解法

一阶常微分方程的基本形式：

$$M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x=0\tag{1.29}$$

1.2.1 分离变量法

定义 1.2.1: 若 $M(t,x)=T(t)X(x),N(t,x)=T_1(t)X_1(x)$，则称1.29为分离变量方程：

$$T(t)X(x)\mathrm{d}t+T_1(t)X_1(x)\mathrm{d}x=0\tag{1.30}$$

(1) 如果 $T_1(t)X_1(x)\neq 0$，于是变为：

$$\frac{T(t)}{T_1(t)}\mathrm{d}t+\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x=0\tag{1.31}$$

两边同时对于变量积分：

$$\int\frac{T(t)}{T_1(t)}\mathrm{d}t+\int\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x=C\tag{1.32}$$

(2) 如果 $\exists(t,x), T_1(t)X_1(x)=0$，设 $T_1(t)$ 的零点为 $a_i, i=1,2,\cdots$，$X_1(x)$ 的零点为 $b_i, i=1,2,\cdots$，则 $t=a_i, x=b_i$ 均满足方程1.30，于是：$t=a_i$ 和 $x=b_i$ 均为方程1.30的特解。

综上所述，通积分为：$\int \frac{T(t)}{T_1(t)}\mathrm{d}t + \int \frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x = C$，而 $t=a_i, x=b_i$ 均为特解。若特解包含于通积分，那么可以省略。

例 1.5:

$$\left(t^2+1\right)\left(x^2-1\right)\mathrm{d}t + tx\mathrm{d}x = 0 \tag{1.33}$$

解: (1) $t\left(x^2-1\right) \neq 0$ 时，$\frac{t^2+1}{t}\mathrm{d}t + \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = 0$，积分得：$t^2 + \ln t^2 + \ln\left|x^2-1\right| = C$，也即：$x^2 = 1 + \frac{C\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}, C \neq 0$.

(2) $t=0, x=\pm 1$ 是特解，其中 $x=\pm 1$ 也即 $C=0$ 时的情况。

综上所述，原方程的通解为 $x^2 = 1 + \frac{C\mathrm{e}^{-t}}{t^2}, C \in \mathbb{R}$，特解为 $t=0$.

例 1.6: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t+x)$，令 $u=t+x, \mathrm{d}u = \mathrm{d}t + \mathrm{d}x$，化为分离型方程 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u)+1$.

定义 1.2.2: 对于方程1.29，若 $M(st,sx) = s^m M(y,x), N(st,sx) = s^m N(t,x), s,m \in \mathbb{R}$，则称1.29为 m 次齐次方程。

设变换 $x=tu$，于是：

$$\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u,\ M(t,x) = M(t,tu) = t^m M(1,u),\ N(t,x) = t^m N(1,u) \tag{1.34}$$

将方程1.29化简为

$$t^m\left(M(1,u) + uN(1,u)\right)\mathrm{d}t + t^{m+1}N(1,u)\mathrm{d}u = 0 \tag{1.35}$$

注记 1.2.1: $t=0$ 是上述方程的解，但是未必是方程1.29的解。

定理 1.2.1: 齐次方程1.29总是可以化成形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g\left(\frac{x}{t}\right) \tag{1.36}$$

证明: 首先验证 $N(t,x)=0$ 是否是解，然后当 $N(t,x) \neq 0$ 时：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{M(t,x)}{N(t,x)} = -\frac{s^m M(t,x)}{s^m N(t,x)} = -\frac{M(st,sx)}{N(st,sx)} \overset{s=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} -\frac{M(1,\frac{x}{t})}{N(1,\frac{x}{t})} \triangleq g\left(\frac{x}{t}\right) \tag{1.37}$$

例 1.7: 化简方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right) \tag{1.38}$$

解: (1) 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时，是齐次方程。

(2) 当 $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ 时，解线性方程组，化为齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = f\left(\frac{a_1\tilde{t} + b_1\tilde{x}}{a_2\tilde{t} + b_2\tilde{t}}\right) \tag{1.39}$$

或者分离型方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{\lambda(a_1t + b_1x) + c_2}\right) \tag{1.40}$$

例 1.8: Riccati 方程

考虑具有形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t) \tag{1.41}$$

的一阶非线性微分方程，其中 $p(t) \neq 0$. 一般无解析解。

形如 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at^n + bx^2$ 的方程在 $n = -2, -\frac{4m}{2m\pm 1}, m \in \mathbb{N}$ 时可以化为分离型方程。

定理 1.2.2: 若 Riccati 方程1.41已知一个特解 $x = \varphi(t)$，那么可以找出通解。

证明: 设 $y(t) = x(t) - \varphi(t)$，不妨设 $y(t) \neq 0$，代入方程1.41得:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = p(t)\,(y+\varphi)^2 + q(t)\,(y+\varphi) + r(t) \tag{1.42}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p(t)\left(y^2 + 2y\varphi\right) + q(t)y \tag{1.43}$$

$$\Longleftrightarrow y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p(t)\left(1 + 2\varphi y^{-1}\right) + q(t)y^{-1} \tag{1.44}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}y^{-1}}{\mathrm{d}t} + (2\varphi(t)p(t) + q(t))\,y^{-1} = -p(t) \tag{1.45}$$

$$\Longrightarrow y^{-1} = \mathrm{e}^{-\int(2p(t)\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t}\left(C - \int \mathrm{e}^{\int(2p(t)\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t}p(t)\mathrm{d}t\right) \tag{1.46}$$

$$\Longrightarrow y = \mathrm{e}^{\int(2p(t)\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t}\left(C - \int \mathrm{e}^{\int(2p(t)\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t}p(t)\mathrm{d}t\right)^{-1} \tag{1.47}$$

$$\Longleftrightarrow x(t) = \mathrm{e}^{\int(2p(t)\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t}\left(C - \int p(t)\mathrm{e}^{\int(2p(t)\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)^{-1} + \varphi(t) \tag{1.48}$$

1.2.2 一阶线性方程

一阶线性方程的基本形式:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + p(t)x = q(t) \tag{1.49}$$

定义 1.2.3: 对于方程1.49，若 $q(t) = 0$，则称为一阶齐次线性方程；否则，称为一阶非齐次线性方程。

(1) 对于一阶齐次线性方程，使用分离变量法直接积分求解。

(2) 对于一阶非齐次线性方程，使用积分因子法和常数变易法进行求解。

定义 1.2.4: 积分因子法

取 $\mu(t) = \mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t} > 0$，将原方程两边同时乘以 $\mu(t)$ 得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}x(t)\right) = \mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + p(t)x(t)\right) = \mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}q(t) \tag{1.50}$$

于是:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\left(\int \mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}q(t)\mathrm{d}t\right) \tag{1.51}$$

考虑初值问题：$x(t_0) = x_0$，于是解为:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{s} p(u)\mathrm{d}u}q(s)\mathrm{d}s + x_0\right) \tag{1.52}$$

定义 1.2.5: 常数变易法

注意到：方程1.29对应的齐次方程的解为：

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s} \tag{1.53}$$

我们将其中的任意常数 C 变为待定函数 $C(t)$，也即令：

$$x(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t} \tag{1.54}$$

然后重新代入方程1.29，得：

$$C'(t)\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t} = q(t) \implies C(t) = \int q(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{1.55}$$

于是：

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\left(\int \mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t} q(t)\mathrm{d}t\right) \tag{1.56}$$

例 1.9: Bernoulli 方程

若一阶非齐次方程具有形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + p(t)x = q(t)x^{\alpha} \tag{1.57}$$

其中 $\alpha \neq 0, 1$，那么显然地，$x(t) = 0$ 是一个特解；当 $x(t) \neq 0$ 时，解得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}x^{-\alpha} + p(t)x^{-\alpha} = q(t) \tag{1.58}$$

$$\xLeftrightarrow{y=x^{1-\alpha}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (1-\alpha)p(t)y = (1-\alpha)q(t) \tag{1.59}$$

$$\implies y = (1-\alpha)\mathrm{e}^{-\int(1-\alpha)p(t)\mathrm{d}t}\int \mathrm{e}^{\int(1-\alpha)p(t)\mathrm{d}t}q(t)\mathrm{d}t \tag{1.60}$$

$$\iff x(t) = \left((1-\alpha)\mathrm{e}^{-\int(1-\alpha)p(t)\mathrm{d}t}\int \mathrm{e}^{\int(1-\alpha)p(t)\mathrm{d}t}q(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{1.61}$$

1.2.3 全微分 (恰当) 方程与积分因子

定义 1.2.6: 对于方程1.29，若存在光滑函数 $u(t,x)$ 使得：

$$\mathrm{d}u(t,x) = M(t,x)\mathrm{d}t + N(t,x)\mathrm{d}x \iff \nabla u = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \tag{1.62}$$

则称方程1.29为全微分方程或恰当方程 (**exact equation**)，此时方程1.29的通解即为：

$$u(t,x) = 0 \tag{1.63}$$

定理 1.2.3: 若存在区域 D，使得：$M(t,x), N(t,x) \in C(D)$ 且 $\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial t} \in C(D)$，则称方程1.29是恰当的，当且仅当 $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$. 此时通解为：

$$C = u(t,x) - u(t_0,x_0) = \int_{L_{(t_0,x_0)(t,x)}} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}x) \tag{1.64}$$

$$= \int_{t_0}^{t} M(t,x_0)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} N(t,x)\mathrm{d}x \tag{1.65}$$

$$= \int_{t_0}^{t} M(t,x)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} N(t_0,x)\mathrm{d}x \tag{1.66}$$

定义 1.2.7: 积分因子

对于方程1.29，若存在光滑函数 $\mu(t,x)$，使得方程

$$\mu(t,x)M(t,x)\mathrm{d}t+\mu(t,x)N(t,x)\mathrm{d}x=0 \tag{1.67}$$

称为恰当方程，则称 $\mu(t,x)$ 是方程1.29的一个积分因子。

$\mu(t,x)$ 是方程1.29，当且仅当：

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial t}\iff N\frac{\partial\mu}{\partial t}-M\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu \tag{1.68}$$

注记 1.2.2: 若通过上述等价方程来求解积分因子，那么需要求解一个偏微分方程，需要避免此种情况。

注记 1.2.3: 积分因子不唯一

假设 $\mu(t,x)$ 是方程1.29的积分因子，使得 $\mathrm{d}\phi=\mu M\mathrm{d}t+\mu N\mathrm{d}x$，那么易见 $f(\phi)\mu$ 也是方程1.29的积分因子，因为 $f(\phi)\mu(M\mathrm{d}t+N\mathrm{d}x)=\mathrm{d}\int f(\phi)\mathrm{d}\phi$.

定理 1.2.4: 齐次方程的积分因子

对于方程1.29是 α 次齐次方程，那么具有积分因子：

$$\mu(t,x)=tM(t,x)+xN(t,x) \tag{1.69}$$

证明: 我们只考虑 $t\neq 0$ 的情形，代换 $x=ut$，于是：

$$\begin{aligned}
&M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x=0\\
\iff&M(t,ut)\mathrm{d}t+N(t,ut)\left(u\mathrm{d}t+t\mathrm{d}u\right)=0\\
\iff&\left(M(t,ut)+uN(t,ut)\right)\mathrm{d}t+tN(t,ut)\mathrm{d}u=0\\
\iff&t^{\alpha}\left(M(1,u)+uN(1,u)\right)\mathrm{d}t+t^{\alpha+1}N(1,u)\mathrm{d}u=0
\end{aligned}$$

两边同时除以 $t^{\alpha+1}\left(M(1,u)+uN(1,u)\right)$，得：

$$\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}\mathrm{d}u=0 \tag{1.70}$$

转化为一个分离型方程，其解为：

$$\ln|t|+\int\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}\mathrm{d}u=C \tag{1.71}$$

因此，$\mu(t,x)=\frac{1}{tM(t,x)+xN(t,x)}$ 是齐次方程1.29的一个积分因子。 □

定理 1.2.5: 由式1.68，方程1.29存在仅依赖于 t（或 x）的积分因子 μ，当且仅当：

$$\mu(t)=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mathrm{d}t\right) \tag{1.72}$$

或：

$$\mu(x)=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}}{M}\mathrm{d}x\right) \tag{1.73}$$

定理 1.2.6: 由式1.68，方程1.29存在形如 $\mu=\mu\left(t^{\alpha}\pm x^{\beta}\right)$ 的积分因子的充要条件是：

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\left(\alpha t^{\alpha-1}N\mp\beta x^{\beta-1}M\right)^{-1}=\varphi\left(t^{\alpha}\pm x^{\beta}\right)\tag{1.74}$$

定理 1.2.7: 由式1.68，方程1.29存在形如 $\mu=\mu\left(f(t,x)\right)$ 的积分因子的充要条件是：

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\left(N\frac{\partial f}{\partial t}-M\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}=\varphi(f(t,x))\tag{1.75}$$

例 1.10: 试用积分因子法求解一阶线性方程1.49.

解: 将方程1.49化为：

$$(-p(t)x+q(t))\,\mathrm{d}t-\mathrm{d}x=0\tag{1.76}$$

此时，$M=-p(t)x+q(t),N=-1$，于是：

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}=p(t)\tag{1.77}$$

因此积分因子为 $\mu(t)=\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}$，于是乘上积分因子，化为：

$$\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}(-p(t)x+q(t))\,\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=0\tag{1.78}$$

于是：

$$C=\int\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}q(t)\mathrm{d}t-\int\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}q(t)\mathrm{d}t-x\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\tag{1.79}$$

于是：

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\left(\int\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}q(t)\mathrm{d}t-C\right)\tag{1.80}$$

定理 1.2.8: 分组求积分因子
设 $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i\mathrm{d}t+N_i\mathrm{d}x)=0$，求积分因子。

解: 先对每一组 $M_i\mathrm{d}t+N_i\mathrm{d}x=0$ 求出积分因子 μ_i，使得其乘上积分因子后满足：

$$M_i\mu_i\mathrm{d}t+N_i\mu_i\mathrm{d}x=\mathrm{d}\phi_i\tag{1.81}$$

注意到：此时任取光滑函数 $g_i(s)$，则 $g_i\left(\mu_i\right)\mu_i$ 也是方程 $M_i\mathrm{d}t+N_i\mathrm{d}x=0$ 的积分因子。于是，取适当的 $\{g_i(s)\}_{i=1}^{n}$ 使得 $\exists\mu(t,x),\forall 1\leqslant i\leqslant n,\ g_i\left(\mu_i(t,x)\right)\mu_i(t,x)=\mu(t,x)$. 此时 $\mu(t,x)$ 即为原方程的积分因子。

例 1.11: 求非恰当方程

$$\left(\frac{x}{t}+3t^2\right)\mathrm{d}t+\left(1+\frac{t^3}{x}\right)\mathrm{d}x=0\tag{1.82}$$

的通解。

解: 方程改写为

$$\left(\frac{x}{t}\mathrm{d}t+\mathrm{d}x\right)+\left(3t^2\mathrm{d}t+\frac{t^3}{x}\mathrm{d}x\right)=0\tag{1.83}$$

对于 $\frac{x}{t}\mathrm{d}t+\mathrm{d}x$，有积分因子 $\mu_1=t$，求得 $\phi_1=tx$；对于 $3t^2\mathrm{d}t+\frac{t^3}{x}\mathrm{d}x$，有积分因子 $\mu_2=x$，求得 $\phi_2=t^3x$. 对于 $\mu=tg_1(tx)=xg_2(t^3x)$，可取 $g_1(s)=s^2,g_2(s)=s$，则原方程的一个积分因子为

$$\mu=t^3x^2\tag{1.84}$$

方程化为：

$$\left(t^2x^3+3t^5x^2\right)\mathrm{d}t+\left(t^3x^2+t^6x\right)\mathrm{d}x=0 \tag{1.85}$$

解为：

$$\int_0^t 0\mathrm{d}s+\int_0^x\left(t^3s^2+t^6s\right)\mathrm{d}s=\frac{t^3x^3}{3}+\frac{t^6x^2}{2}=C \tag{1.86}$$

1.3 一阶隐式方程

形如

$$F(t,x,x')=0 \tag{1.87}$$

的方程称为**导数未解出的一阶方程**。

例 1.12: *求解形如* $x=g(t,p),p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ *的方程。*

解: 对 t 进行微分，于是：

$$p=g_t+g_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\implies(g_t-p)\,\mathrm{d}t+g_p\mathrm{d}p=0 \tag{1.88}$$

若上述方程有通解 $p=\varphi(t,c)$，那么原方程的通解为 $x=g(t,\varphi(t,x))$.

若上述方程有通解 $t=\psi(p,c)$，那么 $\begin{cases}x=g(t,p)\\t=\psi(p,c)\end{cases}\implies x=g\left(\psi(p,c),p\right)$，其中 p 为参数。

例 1.13: *求解方程* $t=h(x,p),p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

解: 对 t 进行微分，于是：

$$1=h_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+h_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=ph_x+h_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ph_x+ph_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{1.89}$$

也即：

$$(ph_x-1)\,\mathrm{d}x+ph_p\mathrm{d}p=0 \tag{1.90}$$

若方程有通解 $p=\varphi(x,c)$，则原方程的通解为 $t=h\left(x,\varphi(x,c)\right)$；若方程由通解 $x=\psi(p,c)$，则原方程有通解 $\begin{cases}t=h(x,p)\\x=\psi(p,c)\end{cases}\implies t=h(\psi(p,c),p)$，其中 p 为参数。

例 1.14: *求解方程* $F(x,p)=0,\ p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ *(或* $F(t,p)=0$).

解: 设积分曲线有满足题中方程 $F=0$ 的参数表示 $\begin{cases}x=a(s)\\p=b(s)\end{cases}$ (或 $\begin{cases}t=a_1(s)\\p=b_1(s)\end{cases}$)，其中 s 是参数。则 $p=b(s)=0$ 是特解，当 $b(s)\neq 0$ 时：

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{a'(s)\mathrm{d}s}{b(s)}\implies\begin{cases}t=\int\frac{a'(s)}{b(s)}\mathrm{d}s+C\\x=a(s)\end{cases} \tag{1.91}$$

或者：

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=p\mathrm{d}t=b_1(s)a_1'(s)\mathrm{d}s\implies\begin{cases}t=b_1(s)\\x=\int b_1(s)a_1'(s)\mathrm{d}s+C\end{cases} \tag{1.92}$$

例 1.15: Clairaut 方程

求解方程：

$$x = tp + f(p),\ p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ f'(p) \neq 0 \tag{1.93}$$

解: 对 t 求导得：

$$p = p + t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \implies (t + f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.94}$$

(1) 当 $t + f'(p) = 0$ 时，由反函数定理，$t = -f'(p)$，那么 $p = w(t)$，于是特解为 $x = tw(t) + f(w(t))$. 此时 $w'(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}} = -\frac{1}{f''(p)} \neq 0$

(2) 当 $t + f'(p) \neq 0$ 时，$p = C$，因此通解为 $x = Ct + f(C)$.

考虑其特解的过 (t_0, x_0) 的初值问题：$x(t_0) = x_0$，(t_0, x_0) 处的切线为 $x = x_0 + w(t_0)(t - t_0) = t_0 w(t_0) + f(w(t_0)) + w(t_0)(t - t_0) = tw(t_0) + f(w(t_0)) = C_0 t + f(C_0)$，因此，所有通解与过 (t_0, x_0) 的特解在 (t_0, x_0) 处相切，因此该特解是奇解。

定义 1.3.1: 奇解 (曲线族的包络)

微分方程的某个特解，其不在该微分方程的积分曲线族中 (不包含在通解中)，且过特解任意一点，均有通解的某一解与特解相切，则此特解称为奇解，也即积分曲线族的包络线。

例 1.16: 求解方程：

$$x^2 + p^2 = 1,\ p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.95}$$

解: 设 $x = a(s) = \cos s, p = b(s) = \sin s$，则 $a'(s) = -\sin s$. 于是 $\sin s = 0$ 是特解，也即 $x = \pm 1$；当 $\sin s \neq 0$ 时，通解为：

$$\begin{cases} x = \cos s \\ t = \int \frac{-\sin s}{\sin s}\mathrm{d}s - C = -s - C \end{cases} \implies x = \cos(t + C) \tag{1.96}$$

综上所述，通解为 $x = \cos(t + C)$，奇解为 $x = \pm 1$.

例 1.17: 求解方程：

$$p^3 - 4txp + 8x^2 = 0,\ p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.97}$$

解: 易见，$x(t) = 0$ 是方程的特解；当 $x(t) \neq 0$ 时，易知 $p(t) = 0$ 不是方程的解，因此化为：

$$t = \frac{p^3 + 8x^2}{4xp} = \frac{p^2}{4x} + \frac{2x}{p} \tag{1.98}$$

对 t 求导，得：

$$1 = \frac{2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}p^2}{4x^2} + 2\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}p - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}x}{p^2} = \left(\frac{p^2}{2x} - 2\frac{x}{p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p^3}{4x^2} + 2 \tag{1.99}$$

$$\iff \left(\frac{p^2}{2x} - \frac{2x}{p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 1 - \frac{p^3}{4x^2} = 0 \tag{1.100}$$

因为 $x(t), p(t) \neq 0$，所以同时乘以 $4x^2 p$，得：

$$\left(2xp^3 - 8x^3\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p^4 - 4x^2 p$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow 2x\left(p^3-4x^2\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\left(p^3-4x^2\right)\\
&\Longleftrightarrow \left(p^3-4x^2\right)\left(2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-p\right)=0
\end{aligned}
$$

若 $p^3-4x^2=0$，那么 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$，代入 $t=\frac{p^2}{4x}+\frac{2x}{p}$ 得 $x=\frac{4}{27}t^3$.

若 $p^3-4x^2\neq 0$，那么 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{p}{2x} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}x}{2x} \Longleftrightarrow \ln p^2=\ln|x|+C_1 \Longleftrightarrow p^2=\mathrm{e}^{C_1}|x| \Longleftrightarrow p^2=C_2x, C_2\neq 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p=\sqrt{C_2x}$，代入 $t=\frac{p^2}{4x}+\frac{2x}{p}$ 得 $x(t)=C\left(t-C\right)^2, C\neq 0$.

综上所述，通解为 $x=C\left(t-C\right)^2, C\in\mathbb{R}$，特解 (奇解) 为 $x=\frac{4}{27}t^3$.

例 1.18: 金福临 P41-22

求曲线，使得它的切线在两坐标轴之间线段长度为 a $(a>0)$.

解: 设曲线为 $y=y(x)$，那么：

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+\left(y-xy'\right)^2=a^2 \tag{1.101}$$

$$\Longleftrightarrow \left(y-xp\right)^2\frac{p^2}{1+p^2}=a^2 \quad (p=y'(x)) \tag{1.102}$$

$$\Longleftrightarrow \left(y-xp\right)^2=\frac{a^2p^2}{p^2+1} \tag{1.103}$$

$$\Longleftrightarrow y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{^2+1}} \tag{1.104}$$

两边对 x 求导，得：

$$p=x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p\pm\frac{a}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{1.105}$$

$$\Longleftrightarrow \left(x\pm\frac{a}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1.106}$$

若 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0 \Longleftrightarrow p=C\in\mathbb{R}$，那么 $y=Cx\pm\frac{Ca}{\sqrt{C^2+1}}$.

若 $x\pm\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0$，那么 $x=\frac{\mp a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. 代入 $y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{^2+1}}$ 得：$y=\frac{\pm ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$，那么 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

综上所述，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 或 $y=Cx\pm\frac{Ca}{\sqrt{C^2+1}}, C\in\mathbb{R}$.

1.4 高阶方程的降阶

n 阶方程的一般形式即为方程1.1，当 $n\geqslant 2$ 时，统称为高阶方程。

1.4.1 不显含未知函数 x 的方程

对于不显含未知函数及其直到 $k-1$ 阶导数的方程

$$F\left(t,x^{(k)},\cdots,x^{(n)}\right)=0,\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{1.107}$$

令 $g=x^{(k)}$，则方程1.107化为 $n-k$ 阶方程

$$F\left(x,g,g',\cdots,g^{(n-k)}\right)=0 \tag{1.108}$$

1.4.2 不显含自变量 t 的方程

对于方程

$$F\left(x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.109}$$

令 $y = x'$，则注意到：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \tag{1.110}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1.111}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.112}$$

$$\cdots \tag{1.113}$$

因此方程1.109可以化为

$$F\left(x, y, y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots\right) = 0 \tag{1.114}$$

也即新的方程

$$G\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = 0 \tag{1.115}$$

其比方程1.109低一阶。

例 1.19: 导弹追击问题

设 $t = 0$ 时，导弹位于原点，敌艇位于 $(0, H), H = 120\mathrm{km}$，在时刻 t，导弹位于 $P(x(t), y(t))$，敌艇位于 $(v_e t, H)$. 设导弹速度恒为 $v_w = 450\mathrm{km/h}$，敌艇速度为 $v_e = 90\mathrm{km/h}$，求导弹击中敌艇的时间以及位置。

解: 列出微分方程：

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v_w^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{H-y}{v_e t - x} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_w}{\sqrt{1+\left(\frac{H-y}{v_e t-x}\right)^2}} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{v_w}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.116}$$

为了消去 t，对 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(H - y) = v_e t - x$ 对 t 求导，得：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(H - y) + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = v_e - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.117}$$

代入相除，将 x 看作 y 的函数，得：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\frac{H-y}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}} = \frac{v_e}{v_w} \\ x\big|_{y=0} = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\big|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{1.118}$$

令 $p(y)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\lambda=\frac{v_e}{v_w}$，化为一阶分离型方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{H-y}{\sqrt{1+p^2}}=\lambda\\ p\big|_{y=0}=0\end{cases}\tag{1.119}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=p=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{H}{H-y}\right)^{\lambda}-\left(\frac{H-y}{H}\right)^{\lambda}\right)\tag{1.120}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{1}{2}\left(\frac{(H-y)^{1+\lambda}}{H^{\lambda}(1+\lambda)}-\frac{H^{\lambda}(H-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right)+\frac{\lambda H}{1-\lambda^2}\tag{1.121}$$

导弹击中时 $y=H$，代入得：

$$L=x\big|_{y=H}=\frac{\lambda H}{1-\lambda^2}=25\mathrm{km},\ T=t\big|_{y=H}=\frac{L}{v_e}\approx 0.2778\mathrm{h}\tag{1.122}$$

注记 1.4.1: 使用 Euler 方法进行计算

设 t 的步长为 $\tau>0$，设计迭代：

$$\begin{cases}\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}=\frac{v_w}{\sqrt{1+\left(\frac{H-y_k}{v_e t_k-x_k}\right)^2}}\\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}=\frac{v_w}{\sqrt{1+\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{y_k-y_{k-1}}\right)^2}}\\ x_0=y_0=0\end{cases}\tag{1.123}$$

当 $y_k<H\leqslant y_{k+1}$ 时停止迭代。

注记 1.4.2: 使用仿真迭代进行计算

设 t 的步长为 $\tau>0$，设计迭代：

$$\begin{cases}x_{k+1}=x_k+v_w\tau\cos\theta_k\\ y_{k+1}=y_k+v_w\tau\sin\theta_k\\ \theta_k=\arctan\frac{H-y_k}{kv_e\tau-x_k}\end{cases}\tag{1.124}$$

当 $y_k<H\leqslant y_{k+1}$ 时停止迭代。

例 1.20: 导弹问题的变式

对于上述导弹问题，若敌艇立即以 $v_e=135\mathrm{km/h}$ 与导弹方向成固定夹角的方向逃逸，问导弹何时何地击中敌艇？试建立数学模型，并选择若干特殊角度进行计算；试问，最佳逃逸角度是多少？

解: 不妨设敌艇进行顺时针躲避，其逃逸方向与导弹的夹角为 $\gamma\in[0,\pi]$，设敌艇的位置为 $(x_1(t),y_1(t))$，导弹位置为 $(x(t),y(t))$，列出微分方程组：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\frac{v_e}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}}\begin{pmatrix}\cos\gamma&\sin\gamma\\-\sin\gamma&\cos\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x\\y_1-y\end{pmatrix}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{v_w}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}}\begin{pmatrix}x_1-x\\y_1-y\end{pmatrix}\\ x_1(0)=x(0)=y(0)=0,y_1(0)=H\end{cases}\tag{1.125}$$

代换 $x_1-x=z, y_1-y=w$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x_1-\mathrm{d}x, \mathrm{d}w=\mathrm{d}y_1-\mathrm{d}y$，于是原方程等价于：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{v_e}{\sqrt{z^2+w^2}}\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\-\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}-\frac{v_w}{\sqrt{z^2+w^2}}\right)\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{v_w}{\sqrt{z^2+w^2}}\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\\ z(0)=x(0)=y(0)=0, w(0)=H\end{cases}\tag{1.126}$$

$$\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}z\\w\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_e\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\-\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}-v_w\mathbf{I}_{(2)}\\ v_w\mathbf{I}_{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}}\\ \frac{w}{\sqrt{z^2+w^2}}\end{pmatrix}\tag{1.127}$$

代换 $z=r\cos\theta, w=r\sin\theta$，其中 $r\geqslant 0$，于是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial\theta}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}\tag{1.128}$$

$$\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}\tag{1.129}$$

于是方程化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}r\\\theta\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_e\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\-\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}-v_w\mathbf{I}_{(2)}\\ v_w\mathbf{I}_{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_e\cos\gamma-v_w\\-\frac{v_e}{r}\sin\gamma\\v_w\cos\theta\\v_w\sin\theta\end{pmatrix}\tag{1.130}$$

根据初值条件 $x(0)=y(0)=0, r(0)=H, \theta(0)=\frac{\pi}{2}$ 以及限制条件 $r\geqslant 0$，解得：

$$\begin{cases}r(t)=H-(v_w-v_e\cos\gamma)\,t\\ \theta(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{v_e\sin\gamma}{v_w-v_e\cos\gamma}\ln\frac{H}{H-(v_w-v_e\cos\gamma)t}\\ x(t)=v_w\int_0^t\sin\left(\frac{v_e\sin\gamma}{v_w-v_e\cos\gamma}\ln\frac{H}{H-(v_w-v_e\cos\gamma)s}\right)\mathrm{d}s\\ y(t)=v_w\int_0^t\cos\left(\frac{v_e\sin\gamma}{v_w-v_e\cos\gamma}\ln\frac{H}{H-(v_w-v_e\cos\gamma)s}\right)\mathrm{d}s\end{cases}\quad t\in\left[0,\frac{H}{v_w-v_e\cos\gamma}\right]\tag{1.131}$$

注意到：

$$\begin{aligned}&\int\sin(A\ln x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\mathrm{e}^t}\int\sin(At)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\=&\frac{\mathrm{e}^t\,(\sin(At)-A\cos(At))}{A^2+1}+C=\frac{x\,(\sin(A\ln x)-A\cos(A\ln x))}{A^2+1}+C\\&\int\cos(A\ln x)\,\mathrm{d}x=\frac{x\,(A\sin(A\ln x)+\cos(A\ln x))}{A^2+1}+C\end{aligned}\tag{1.132}$$

因此，令 $A=\frac{v_e\sin\gamma}{v_w-v_e\cos\gamma}, B=v_w-v_e\cos\gamma$，则：

$$\begin{aligned}x(t)=&v_w\int_0^t\sin\left(A\ln\frac{H}{H-Bs}\right)\mathrm{d}s\\=&v_w\int_0^t\sin(A\ln H-A\ln(H-Bs))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= v_w \sin(A\ln H)\int_0^t \cos(A\ln(H-Bs))\,\mathrm{d}s - v_w\cos(A\ln H)\int_0^t \sin(A\ln(H-Bs))\,\mathrm{d}s\\
&= v_w\frac{\sin(A\ln H)}{B}\int_{H-Bt}^{H}\cos(A\ln u)\,\mathrm{d}u - v_w\frac{\cos(A\ln H)}{B}\int_{H-Bt}^{H}\sin(A\ln u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(Au\cos\left(A\ln\frac{u}{H}\right) - u\sin\left(A\ln\frac{u}{H}\right)\right)\Bigg|_{u=H-Bt}^{u=H}\\
&= \frac{v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(AH - A(H-Bt)\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right) + (H-Bt)\sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\right)\\
&= \frac{AHv_w}{B\left(A^2+1\right)} - \frac{(H-Bt)\,v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(A\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right) - \sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= v_w\int_0^t \cos\left(A\ln\frac{H}{H-Bs}\right)\mathrm{d}s\\
&= v_w\int_0^t \cos(A\ln H - A\ln(H-Bs))\,\mathrm{d}s\\
&= v_w\cos(A\ln H)\int_0^t \cos(A\ln(H-Bs))\,\mathrm{d}s + v_w\sin(A\ln H)\int_0^t \sin(A\ln(H-Bs))\,\mathrm{d}s\\
&= v_w\frac{\cos(A\ln H)}{B}\int_{H-Bt}^{H}\cos(A\ln u)\,\mathrm{d}u + v_w\frac{\sin(A\ln H)}{B}\int_{H-Bt}^{H}\sin(A\ln u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(Au\sin\left(A\ln\frac{u}{H}\right) + u\cos\left(A\ln\frac{u}{H}\right)\right)\Bigg|_{u=H-Bt}^{u=H}\\
&= \frac{v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(H - A(H-Bt)\sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right) - (H-Bt)\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\right)\\
&= \frac{Hv_w}{B\left(A^2+1\right)} - \frac{(H-Bt)\,v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(A\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right) + \sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\right)
\end{aligned}
$$

因此，记 $A = \frac{v_e\sin\gamma}{v_w - v_e\cos\gamma}, B = v_w - v_e\cos\gamma,\ A, B > 0$，则原方程的解为：

$$
\begin{cases}
x_1(t) = x(t) - (H-Bt)\sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\\
y_1(t) = y(t) + (H-Bt)\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\\
x(t) = \frac{AHv_w}{B\left(A^2+1\right)} - \frac{(H-Bt)v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(A\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right) - \sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\right)\\
y(t) = \frac{Hv_w}{B\left(A^2+1\right)} - \frac{(H-Bt)v_w}{B\left(A^2+1\right)}\left(A\cos\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right) + \sin\left(A\ln\frac{H-Bt}{H}\right)\right)
\end{cases}
\quad t\in\left[0, \frac{H}{B}\right] \tag{1.133}
$$

于是，击中敌艇时：

$$
\begin{cases}
T = \frac{H}{B} = \frac{H}{v_w - v_e\cos\gamma} = \frac{8}{30-9\cos\gamma}\mathrm{h}\\
\begin{pmatrix} x(T)\\ y(T)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{AHv_w}{B\left(A^2+1\right)}\\ \frac{Hv_w}{B\left(A^2+1\right)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{Hv_wv_e\sin\gamma}{v_w^2-2v_ev_w\cos\gamma+v_e^2}\\ \frac{Hv_w(v_w-v_e\cos\gamma)}{v_w^2-2v_ev_w\cos\gamma+v_e^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3600\sin\gamma}{109-60\cos\gamma}\\ \frac{12000-3600\cos\gamma}{109-60\cos\gamma}\end{pmatrix}\mathrm{km}
\end{cases} \tag{1.134}
$$

且注意到：

$$
\sqrt{x^2(T)+y^2(T)} = \frac{Hv_w}{\sqrt{v_w^2 - 2v_ev_w\cos\gamma + v_e^2}} = \frac{1200}{\sqrt{109-60\cos\gamma}}\mathrm{km} \tag{1.135}
$$

因此，最佳逃逸角度为 $\gamma = 0$，也即直接背向导弹，向正北方向逃逸。

1.4.3 全微分方程

若存在光滑函数 Φ 使得方程1.1具有形式：

$$F\left(t,x,\cdots,x^{(n)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left(t,x,\cdots,x^{(n-1)}\right) \tag{1.136}$$

那么称方程1.1为全微分方程，解即为 $\Phi=C$，比原方程降了 1 阶。

例 1.21: 解方程：

$$mx''-f(x)=0 \tag{1.137}$$

解: 注意到：该方程不显含未知函数。令 $p=x'$，于是 $x''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，方程化为

$$mp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x)\iff f(x)\mathrm{d}x=mp\mathrm{d}p\iff\frac{p^2m}{2}=\int f(x)\mathrm{d}x \tag{1.138}$$

再解出 $x(t)$.

解: 考虑积分因子 $\mu=x'$，则：

$$0=x'\left(mx''-f(x)\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mx'^2-2\int f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{1.139}$$

降阶为：

$$mx'^2-2\int f(x)\mathrm{d}x=C \tag{1.140}$$

例 1.22: 求解二阶拟线性常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x^2=0 \tag{1.141}$$

解: 作 Lienard 变换，令 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{x^3}{3}$. 将原方程化为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x^2=0\iff\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(y-\frac{x^3}{3}\right)+x^2=0 \tag{1.142}$$

若 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，那么 $x=0$.
若 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq 0$，那么化为：

$$x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+y-\frac{x^3}{3}=0 \tag{1.143}$$

$$\iff\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}-x^3=-3y \tag{1.144}$$

$$\iff x^3=3y+3+C_1\mathrm{e}^y=3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x^3+3+C\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{x^3}{3}} \tag{1.145}$$

$$\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+1+C_1\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{x^3}{3}}=0 \tag{1.146}$$

若 $C_1=0$，那么解得 $x=-t+C,\ C\in\mathbb{R}$.
若 $C_1\neq 0$，那么 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{x^3}{3}}=C\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+1\right)$，$C\neq 0$. 令 $p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，于是

$$x^3=3\ln\left(C(p+1)\right)-3t\iff x=\sqrt[3]{3\ln\left(C(p+1)\right)-3t} \tag{1.147}$$

对 t 求导得 $p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$，因此积分得：

$$t=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{x}{p}-\int x\mathrm{d}\frac{1}{p}=\frac{\sqrt[3]{3\ln\left(C(p+1)\right)-3t}}{p}+\int\frac{\sqrt[3]{3\ln\left(C(p+1)\right)-3p}}{p^2}\mathrm{d}p \tag{1.148}$$

综上所述，解为：$x=0$ 或 $x=-t+C,\ C\in\mathbb{R}$，或

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{3\ln\left(C(p+1)\right)-3t} \\ t=\frac{\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}}{p}+\int\frac{\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}}{p^2}\mathrm{d}p \end{cases} \tag{1.149}$$

1.5 微分方程组的初等积分法与首次积分

命题 1.5.1: 任意阶显式的微分方程 (组) 可以化为标准方程 (组):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{1.150}$$

其中:

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \mathbf{f}=\begin{pmatrix}f_1(t,\mathbf{x})\\f_2(t,\mathbf{x})\\\vdots\\f_n(t,\mathbf{x})\end{pmatrix} \tag{1.151}$$

由数学归纳法，易证。

注记 1.5.1: 我们此处只讨论方程个数与未知函数个数相同的情况。

例 1.23: 对于方程

$$x^{(n)}=f\left(t,x',\cdots,x^{(n-1)}\right) \tag{1.152}$$

引入新的未知函数：$x_1=x,x_2=x',\cdots,x_n=\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}$，化为：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_3 \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t}=x_n \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f\left(t,x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \end{cases} \tag{1.153}$$

例 1.24: 对于方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=F\left(t,u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},v,w,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\right) \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=G\left(\cdots\right) \\ \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}t^3}=H\left(\cdots\right) \end{cases} \tag{1.154}$$

令 $x_1=u,x_2=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},x_3=v,x_4=w,x_5=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},x_6=\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t}$，化为：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=F\left(t,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\right)\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=G\left(\cdots\right)\\ \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t}=x_5\\ \frac{\mathrm{d}x_5}{\mathrm{d}t}=x_6\\ \frac{\mathrm{d}x_6}{\mathrm{d}t}=H\left(\cdots\right)\end{cases} \tag{1.155}$$

下面考虑求解方程组的初等解法，主要有 2 种：化为高阶方程、首次积分法。

例 1.25: 化为高阶方程

求解方程组：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\end{cases} \tag{1.156}$$

解: 对第一式，对 t 微分得：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x \implies x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t} \tag{1.157}$$

代回原方程组，得：

$$\begin{cases}x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}\\ y=C_1\mathrm{e}^t-C_2\mathrm{e}^{-t}\end{cases} \tag{1.158}$$

定义 1.5.1: 首次积分

若标量函数 $\Phi(t,\mathbf{x})\in C(D)$ 不是常数，且在方程组1.150于 D_0 中的任一积分曲线 $\Gamma:\mathbf{x}=\varphi(t)$ 上 Φ 取常数 $C(\Gamma)$ (仅与曲线 Γ 相关)，也即 $\Phi(t,\varphi(t))\equiv C$ 或 $\Phi(t,\mathbf{x})\big|_\Gamma=C$. 则 $\Phi(t,\mathbf{x})=C$ 为方程组1.150在 D_0 内的一个首次积分，其中 C 是任意常数。(也即通过对方程组的运算，构造出全微分方程 $\mathrm{d}\Phi(t,\mathbf{x})=0$，即为一个首次积分)

根据 Jacobi 行列式，方程组1.150的 n 个首次积分 $\Phi_j(t,\mathbf{x})=C_j$, $j=1,2,\cdots,n$ 互相独立 (线性无关) 等价于：

$$\frac{\partial\left(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.159}$$

例 1.26: 求解方程组：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\end{cases} \tag{1.160}$$

解: 注意到：$xy-yx=0$，也即 $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0 \iff x^2+y^2=C$，因此 $x^2+y^2=C$ 是一个首次积分。又因为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+y^2$，若 $x=0$，则 $y=0$，否则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{y}{x}=1+\frac{y^2}{x^2}$，记 $y=vx$，于是 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=1+v^2$，解得 $\arctan v=t+C$，也即 $\arctan\frac{y}{x}-t=C$. 于是原方程的两个首次积分分别为 $x^2+y^2=C_1^2$, $\arctan\frac{y}{x}-t=C_2$. 联立这两个首次积分，并把 C_1,C_2 作为参数，即可解得 x,y.

令 $\begin{cases} x = C_1 \cos\theta(t) \\ y = C_1 \sin\theta(t) \end{cases}$，则 $\theta - t = C_2$，于是 $\theta = t + C_2$，代回，得：

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(t + C_2) \\ y(t) = C_1 \sin(t + C_2) \end{cases} \tag{1.161}$$

定理 1.5.1: 判别首次积分

设函数 $\Phi(t, \mathbf{x}) \in C(D)$ 不是常数，也即 $\nabla_{\mathbf{x}}\Phi \neq \mathbf{0}$，那么 $\Phi(t, \mathbf{x}) = C$ 是方程1.150的首次积分的充要条件是：在 D 内恒有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} f_k = 0 \tag{1.162}$$

证明: 若是首次积分，对于 D 内方程1.150的任意一条积分曲线 Γ，设 $\Gamma : \mathbf{x} = \varphi(t)$，那么 $\Phi(t, \varphi(t)) \equiv C$. 对其对 t 求微分，代入方程1.150得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left(t, \varphi(t)\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathbf{x}=\varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \mathbf{f}(\varphi(t)) = 0 \tag{1.163}$$

由于 D 内处处都有方程1.150的积分曲线，所以1.162式对于任意 $\mathbf{x} = \varphi(t)$ 都成立，则在 D 内都成立。

当1.162式成立时，其对于任意积分曲线都成立，对于任一曲线 $\mathbf{x} = \varphi(t)$，都有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t, \varphi(t)) = 0$，那么 $\Phi(t, \varphi(t)) = C$，因此是一个首次积分。 □

定理 1.5.2: 首次积分降阶

若已知微分方程1.150的一个首次积分 $\Phi(t, \mathbf{x}) = C$，则方程1.150降低一阶。

证明: 由首次积分定义，$\nabla_{\mathbf{x}}\Phi \neq \mathbf{0}$，不妨设 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \neq 0$. 由隐函数定理：

$$x_n = g(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, C) \tag{1.164}$$

且上述函数具有偏导数：

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)^{-1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)^{-1} \quad k = 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{1.165}$$

将 $x_n = g(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, C)$ 代入方程1.150的前 $n-1$ 个分量微分方程：

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k\left(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, g(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, C)\right), \ k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{1.166}$$

因此化为了 $n-1$ 阶方程。 □

定理 1.5.3: 首次积分存在性及个数

若 $P_0(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$，则存在 P_0 的某个邻域 $D_0 \subset D$，使得在 D_0 内有且仅有 n 个独立的首次积分。

证明: 在 P_0 的某一个邻域中任取初值 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{c}$. 由解对初值的可微性定理，方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}=f(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{c} \end{cases} \tag{1.167}$$

的解 $\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{c})$ 在 P_0 的某个邻域内对 $(t,\mathbf{c})$ 连续可微. 因为 $\Phi(t_0,\mathbf{c})=\mathbf{c}$，所以 $\forall 1\leqslant i,j\leqslant n$, $\frac{\partial\Phi_i(t,\mathbf{c})}{\partial c_j}\Big|_{t=t_0}=\delta_{ij}$，于是 Jacobi 行列式：

$$\left.\frac{\partial\left(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\right)}{\partial\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right)}\right|_{t=t_0}=1\neq 0 \tag{1.168}$$

由隐函数定理，存在 P_0 的邻域 D_0 以及 n 个可微函数 Ψ_j, $1\leqslant j\leqslant n$ 使得 $c_j=\Psi_j(t,\mathbf{x})$，且满足：

$$\left.\frac{\partial\left(\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}\right|_{t=t_0}=1\neq 0 \tag{1.169}$$

也即方程1.150在 D_0 内的 n 个不相关的首次积分。

反设方程1.150在 D_0 内有 $n+1$ 个首次积分 $\Psi_j(t,\mathbf{x})=c_j$, $1\leqslant j\leqslant n+1$，由1.162知：

$$\frac{\partial\Psi_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_k}f_k=0,\ \forall 1\leqslant j\leqslant n+1 \tag{1.170}$$

也即在 D_0 内恒有：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial t} & \frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{1.171}$$

因为该线性方程组在 D_0 内处处都有非零解，从而其系数 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(\Psi_1,\cdots,\Psi_{n+1})}{\partial(t,x_1,\cdots,x_n)}=0,\ \forall(t,\mathbf{x})\in D_0 \tag{1.172}$$

所以，任何 $n+1$ 个首次积分非独立 (函数相关)，则有且仅有 n 个独立的首次积分。 □

定理 1.5.4: 由首次积分解方程组

若方程组1.150在某个区域 D 内有 n 个独立的首次积分 $\Phi_j(t,\mathbf{x})=C_j$, $j=1,2,\cdots,n$，那么方程组1.150在 D 内的通解为

$$\mathbf{x}=\varphi(t,C_1,C_2,\cdots,C_n) \tag{1.173}$$

且 C_j, $j=1,2,\cdots,n$ 是 n 个独立的任意常数。

证明: 因为 n 个首次积分 $\Phi_j(t,\mathbf{x})=C_j$, $j=1,2,\cdots,n$ 相互独立，所以：

$$\frac{\partial\left(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}\neq 0 \tag{1.174}$$

由隐函数定理，根据方程 $\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})=\mathbf{C}$ 得到 $\mathbf{x}=\varphi(t,\mathbf{C})$. 把其代回 $\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})=\mathbf{C}$ 得到恒等式：

$$\mathbf{\Phi}(t,\varphi(t,\mathbf{C}))=\mathbf{C} \tag{1.175}$$

对上式，分别对 t, C_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ 求导得：

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial C_j} = \delta_{ij} \end{cases} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{1.176}$$

由1.162式知：

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_j \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.177}$$

代入上述方程组第一式，方程组化为：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|cccc} f_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_n} \\ f_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_n} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(n)} \end{pmatrix} \tag{1.178}$$

因为 $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \neq 0$，所以方程组解得：

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{f} \\ \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(C_1, C_2, \cdots, C_n)} = \left(\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \right)^{-1} \neq 0 \end{cases} \tag{1.179}$$

因此 $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{C})$ 是标准方程组1.150的解，且 C_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个互相独立的任意常数。

我们下面证明：标准方程组1.150任意一个解都具有此形式。取方程组1.150在 D 内的任意一个解 $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$，令其初值条件为 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{z}(t_0)$. 令 $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{x}_0)$. 由隐函数定理，从方程：

$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{C} \tag{1.180}$$

可以得到方程1.150的一个解：

$$\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{C}) \tag{1.181}$$

易知，其满足初值条件 $x_0 = \varphi(t_0, \mathbf{C})$. 因此，$\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ 和 $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{C})$ 是满足同一初值条件的两个解，根据解的唯一性定理知，$\mathbf{z}(t) = \varphi(t, \mathbf{C})$. 因此，任意一个解都具有 $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{C})$ 的形式。 □

例 1.27: 求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy} \tag{1.182}$$

解: $\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} \implies \frac{x}{y} = C_1$, 将 $x = C_1 y$ 代入 $\frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{C_1 y^2}$, 于是 $y \neq 0, C_1 y \mathrm{d}y - z \mathrm{d}z = 0$, 于是 $c_1 y^2 - z^2 = C_2$，也即 $xy - z^2 = C_2$，于是原方程通解为：

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ xy - z^2 = C_2 \end{cases} \quad C_1 \neq 0 \tag{1.183}$$

例 1.28: 求解方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{\mathrm{d}y}{-y\left(z^2 + x^2\right)} = \frac{\mathrm{d}z}{z\left(x^2 + y^2\right)} \tag{1.184}$$

解: 观察上式有：

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0 \tag{1.185}$$

$$\implies \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1 \\ yz = C_2 x \end{cases} \tag{1.186}$$

第二章 常系数线性微分方程

考虑 n 阶常系数线性微分算子：

$$\mathcal{L}[x] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{(k)}(t) \tag{2.1}$$

方程：

$$\mathcal{L}[x] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{(k)}(t) = f(t) \tag{2.2}$$

称为**常系数非齐次线性方程**，若 $f(t) \neq 0$。

与之对应地，方程：

$$\mathcal{L}[x] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{(k)}(t) = 0 \tag{2.3}$$

称为**常系数齐次线性方程**。

定义 2.0.1: 叠加原理

设 $\mathcal{L}$ 为线性微分算子，B 为线性算子 (如恒等算子 $Bv = v$，Neumann 算子 $Bv = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} v$)，则方程：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] = f & \text{in } D \\ B[u]\big|_{\partial D} = \varphi \end{cases} \tag{2.4}$$

的解 u 满足 $u = v + w$，其中：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[v] = 0 & \text{in } D \\ B[v]\big|_{\partial D} = \varphi \end{cases} \text{且} \begin{cases} \mathcal{L}[w] = f & \text{in } D \\ B[w]\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

此时：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[v + w] = \mathcal{L}[v] + \mathcal{L}[w] = [f] \\ B[u]\big|_{\partial D} = B[v + w]\big|_{\partial D} = \varphi \end{cases} \tag{2.6}$$

推论 2.0.1: 方程2.2的通解 = 方程2.3的通解 + 方程2.2的特解

定义 2.0.2: 特征方程

对于线性方程2.2，称

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \lambda^{k} \tag{2.7}$$

为其特征多项式，方程

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\lambda^k=0 \tag{2.8}$$

的根为固有值 (或特征值)。

2.1 齐次方程

定理 2.1.1: 设方程2.8有 m 个互不相同的根 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,m$，分别对应重数 n_i，$\sum\limits_{k=1}^{m}n_i=n$，则：

$$t^j\mathrm{e}^{\lambda_k t},\ 0\leqslant j\leqslant n_k-1,\ 1\leqslant k\leqslant m \tag{2.9}$$

是方程2.3的 n 个线性无关解，方程2.3的通解为：

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k-1}C_{jk}t^j\mathrm{e}^{\lambda_k t} \tag{2.10}$$

其中 C_{jk} 是 n 个任意常数。

证明: 先证满足方程，后证线性无关性。

$$P(\lambda)=a_0\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k)^{n_k} \tag{2.11}$$

$$\Longrightarrow\ \forall k=1,2,\cdots,m,\ P(\lambda_k)=P'(\lambda_k)=\cdots=P^{(n_k-1)}(\lambda_k)=0,\ P^{(n_k)}(\lambda_k)\neq 0 \tag{2.12}$$

因为：

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right]=P(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t},\ \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\mathrm{e}^{\lambda t}=t^j\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{2.13}$$

所以：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[t^j\mathrm{e}^{\lambda_k t}\right]\\
=&\mathcal{L}\left[\left.\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\mathrm{e}^{\lambda t}\right|_{\lambda=\lambda_k}\right]\\
=&\left.\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right]\right|_{\lambda=\lambda_k}\\
=&\left.\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left(P(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}\right)\right|_{\lambda=\lambda_k}\\
=&\left.\sum_{l=0}^{j}C_j^lP^l(\lambda_k)\frac{\partial^{j-l}}{\partial\lambda^{j-l}}\mathrm{e}^{\lambda t}\right|_{\lambda=\lambda_k}\quad l\leqslant j\leqslant n_k-1\\
=&0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

于是 $t^j\mathrm{e}^{\lambda_k t}, 0\leqslant j\leqslant n_k-1, 1\leqslant k\leqslant m$ 是方程的 n 个解。

下面再证明线性无关性：假设：

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k-1}C_{jk}t^j\mathrm{e}^{\lambda_k t}\equiv 0 \tag{2.15}$$

我们去证 $\forall j,k,\ C_{jk}=0$. 我们先使用归纳法证明：若 $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}=0$，则必有 $b_k(t)\equiv 0$，其中 $b_k(t)\in\mathbb{C}[t]$

当 $m=1$ 时，显然成立。

假设对于 m 成立，那么：若 $\sum\limits_{k=1}^{m+1} b_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}=0,\ 1\leqslant k\leqslant m$，且 λ_k 互不相同，则可以化为：

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t)\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})}+b_{m+1}(t)=0 \tag{2.16}$$

的形式。由于 $\exists s\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}b_{m+1}(t)=0$，对上式微分 s 次，化为：

$$\sum_{k=1}^{m} q_k(t)\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t}\equiv 0 \tag{2.17}$$

由归纳假设，$q_k(t)\equiv 0,\ 1\leqslant k\leqslant m$，于是 $b_k(t)\equiv 0,\ 1\leqslant k\leqslant m$，这是因为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(b_k(t)\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t}\right)=\left(b_k'(t)+(\lambda_k-\lambda_{m+1})b_k(t)\right)\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t} \tag{2.18}$$

则 $\mathrm{lc}(q_k)=(\lambda_k-\lambda_{m+1})\mathrm{lc}(b_k)$，由归纳法知，当 $q_k(x)\equiv 0$ 时，必有 $b_k(t)\equiv 0$. 于是 $b_{m+1}(t)\equiv 0$. 因此对 $m+1$ 也成立。由数学归纳法，对 $m\in\mathbb{N}_+$ 成立。

于是知，$\sum\limits_{j=0}^{n_k-1} C_{jk}t^j\equiv 0,\ 1\leqslant k\leqslant m$，因此 $\forall i,j,\ C_{jk}=0$. 所以 $t^j\mathrm{e}^{\lambda_k t},\ 1\leqslant k\leqslant m, 0\leqslant j\leqslant n_k-1$ 是 n 个线性无关的解，于是其线性组合必为 n 阶齐次方程2.3的解。 □

注记 2.1.1: 对于实常系数线性微分方程2.3,2.2，我们利用虚根成对定理，将虚指数的解化为实部和虚部，求解其实解。(因为齐次方程的通解可以进行线性组合)

例 2.1:

$$x''-x'-2x=0 \tag{2.19}$$

解: 解特征方程 $\lambda^2-\lambda-2=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$，于是有 2 个线性无关解 $\mathrm{e}^{2t},\mathrm{e}^{-t}$，则通解为 $x(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}$.

例 2.2:

$$x^{(5)}-3x^{(4)}+4x^{(3)}-4x''+3x'-x=0 \tag{2.20}$$

解: 解特征方程 $\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda_3-4\lambda_2+3\lambda-1=0$ 得 $(\lambda-1)^3\left(\lambda^2+1\right)=0$，$\lambda_1=1(3\text{ 重}),\lambda_{2,3}=\pm\mathrm{i}$(单根)，有 5 线性无关解：$\mathrm{e}^t,t\mathrm{e}^t,t^2\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$，由于方程是实系数的，所以考虑实解：$x(t)=\mathrm{e}^t\left(C_1+C_2t+C_3t^2\right)+C_4\cos t+C_5\sin t$.

对于常系数非齐次线性方程2.2，利用**常数变易法、Laplace 变换法、待定系数法、运算子法**求其特解。

2.2 常数变易法

定义 2.2.1: Wronsky 行列式

对于函数 $\varphi_k(t), 1 \leqslant k \leqslant n$，称行列式：

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

为函数组 $\varphi_k(t), 1 \leqslant k \leqslant n$ 的 **Wronsky** 行列式。

定理 2.2.1: 若 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 为方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{2.22}$$

的 2 个线性无关解，则：

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \tag{2.23}$$

的通解为：

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2(s)} f(s)\mathrm{d}s \tag{2.24}$$

证明: 我们使用**常数变易法**进行证明。令：

$$\begin{cases} x(t) = C_1(t)\varphi_1 + C_2(t)\varphi_2(t) \\ x'(t) = C_1(t)\varphi_1'(t) + C_2(t)\varphi_2'(t) + C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) \end{cases} \tag{2.25}$$

其中 $C_1(t), C_2(t)$ 为待定函数。我们令 $C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0$，方程化为：

$$\begin{cases} x(t) = C_1(t)\varphi_1 + C_2(t)\varphi_2(t) \\ x'(t) = C_1(t)\varphi_1'(t) + C_2(t)\varphi_2'(t) \\ C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

对第二式微分，并代入方程2.23知：

$$C_1(t)' + \varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = f(t) \tag{2.27}$$

联立：

$$\begin{cases} C_1(t)' + \varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = f(t) \\ C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

解得：

$$\begin{cases} C_1'(t) = \frac{-\varphi_2(t)f(t)}{W(t)} \\ C_2'(t) = \frac{\varphi_1(t)f(t)}{W(t)} \end{cases} \tag{2.29}$$

其中：

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \tag{2.30}$$

为函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 的 Wronsky 行列式。

例 2.3:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t) \tag{2.31}$$

假设 $a_1^2 \neq 4a_2$.

解: 齐次方程的 2 个线性无关解为：$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. 于是：

$$W(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \tag{2.32}$$

所以：

$$\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 s}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathrm{e}^{\lambda_2 s}}{W(s)} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2(t-s) - \mathrm{e}^{\lambda_1}}}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{2.33}$$

于是方程的通解为：

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2(t-s) - \mathrm{e}^{\lambda_1}}}{\lambda_2 - \lambda_1} f(s)\mathrm{d}s \tag{2.34}$$

2.3 待定系数法

算法 2.3.1: 对于一些特定情况的待定系数法的使用：

1. $f(t) = P_l(t)\mathrm{e}^{\mu t}$，$\mu$ 为常数，$P_l(\lambda)$ 为 l 次多项式，那么令：

$$x_p(t) = t^k Q_l(t)\mathrm{e}^{\mu t} \tag{2.35}$$

为特解，代入确定多项式 $Q_l(t)$ 即可，其中 k 为 μ 在非齐次方程2.2的特征多项式的根中的重数 (若不是根，则 $k = 0$).

2. $f(t) = (P_l(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$，$P_l(t), Q_m(t)$ 分别为 l, m 次多项式，那么令

$$x_p(t) = t^k\,(C_s(t)\cos\beta t + D_s(t)\sin\beta t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} \tag{2.36}$$

为特解，带入确定多项式 $C_s(t), D_s(t)$，其中 k 为特征值 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 的重数 (若 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 不是特征值，则 $k = 0$)，$s = \max\{l, m\}$.

例 2.4:

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = \mathrm{e}^{-t}(t-5) + \mathrm{e}^t + \sin t \tag{2.37}$$

解: 解特征方程 $(\lambda+1)^3 = 0$ 得 3 重特征根 $\lambda = -1$，于是我们得到方程对应的齐次方程的 3 个线性无关解：$\mathrm{e}^{-t}, t\mathrm{e}^{-t}, t^2\mathrm{e}^{-t}$，利用叠加原理，可以分别求对 $f_1 = \mathrm{e}^{-t}(t-5), f_2 = \mathrm{e}^t, f_3 = \sin t$ 的特解。

对于 $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}(t-5)$，注意到：$\lambda = -1$ 是 3 重特征根，所以令特解为 $x_{p_1}(t) = t^3(a_1 + b_1 t)\mathrm{e}^{-t}$，代入原方程得：$(6a_1 + 24b_1)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(t-5)$，解得 $a_1 = -\frac{5}{6}, b_1 = \frac{1}{24}$，于是 $x_{p_1}(t) = \frac{t-20}{24}t^3\mathrm{e}^{-t}$.

对于 $f_2(t) = \mathrm{e}^t$，设 $x_{p_2}(t) = a_2\mathrm{e}^t$，代入原方程得：$8a_2\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t$，解得 $a_2 = \frac{1}{8}$，于是 $x_{p_2}(t) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^t$

对于 $f_3(t) = \sin t$，设 $x_{p_3}(t) = a_3\cos t + b_3\sin t$，代入原方程得：$(2b_3 - 2a_2)\cos t - 2(a_3 + b_3)\sin t = \sin t$，解得 $a_3 = b_3 = -\frac{1}{4}$，于是 $x_{p_3}(t) = -\frac{\sin t + \cos t}{4}$.

因此，利用叠加原理，原方程的通解为：

$$\left(C_1 + C_2 t + C_3 t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^t - \frac{\sin t + \cos t}{4} \tag{2.38}$$

例 2.5: 受迫阻尼振动问题

设物体质量为 m，阻尼系数 $\beta = pm > 0$，固有振动频率 $\omega_0 > 0$，策动力 $F\sin(\omega t)$, $F = qm \neq 0, \omega > 0$. 求物体的运动方程.

解: 列出方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = q\sin(\omega t) \tag{2.39}$$

易见，该方程的实解是方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}y^2} + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.40}$$

的解的虚部。代入试探解：$y_p(t) = B\mathrm{e}^{rt}$，其中 B, r 是待定常数，则:

$$B\mathrm{e}^{rt}\left(r^2 + pr + \omega_0^2\right) = q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.41}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = \mathrm{i}\omega \\ B = \frac{q}{r^2+pr+\omega_0^2} = \frac{q\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\mathrm{i}\omega p\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+p^2\omega^2} \end{cases} \Longrightarrow y_p(t) = \frac{q\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\mathrm{i}\omega p\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+p^2\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.42}$$

因此，$x(t)$ 的特解为:

$$x_p(t) = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+p^2\omega^2}}\sin\left(\omega t - \varphi\right), \tan\varphi = \frac{p\omega}{\omega_0^2-\omega^2}, \varphi \in (0,\pi) \tag{2.43}$$

当 $p \neq 2\omega_0$ 时，特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + \omega_0^2 = 0$，特征值 $\lambda_{1,2} = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4\omega_0^2}}{2}$，基础解系为: $x_{1,2} = \mathrm{e}^{\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4\omega_0^2}}{2}t}$.

当 $p = 2\omega_0$ 时，特征值 $\lambda = -\omega_0$，基础解系为：$\mathrm{e}^{-\omega_0 t}, t\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

于是:

$$x(t) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{\frac{-p+\sqrt{p^2-4\omega_0^2}}{2}} + C_2\mathrm{e}^{\frac{-p-\sqrt{p^2-4\omega_0^2}}{2}} + \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+p^2\omega^2}}\sin\left(\omega t-\varphi\right) & p > 2\omega_0 \\ \left(C_1 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{-\omega_t} + \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+p^2\omega^2}}\sin\left(\omega t-\varphi\right) & p = 2\omega_0 \\ C_1\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}\sin\left(\sqrt{4\omega_0^2-p^2}t + C_2\right) + \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+p^2\omega^2}}\sin\left(\omega t-\varphi\right) & p < 2\omega_0 \end{cases} \tag{2.44}$$

2.4 运算子法

定义 2.4.1: 定义运算子:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{D}, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \mathcal{D}^2, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} = \mathcal{D}^n \tag{2.45}$$

其中约定 $\mathcal{D}^0 = \mathcal{I}$.

$$P(\mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathcal{D}^k \tag{2.46}$$

称为 n 阶算子多项式，其中 $a_k, 0 \leqslant k \leqslant n$ 为常数，$a_n \neq 0$. 定义:

$$P(\mathcal{D})x = \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x \tag{2.47}$$

例 2.6: 1. $P(\mathcal{D})\mathrm{e}^{at} = P(a)\mathrm{e}^{at}$

2. $P(\mathcal{D})\left(\mathrm{e}^{at}x(t)\right) = \mathrm{e}^{at}P(\mathcal{D}+a)x$

3. $P\left(\mathcal{D}^2\right)\sin(\omega t) = P\left(-\omega^2\right)\sin(\omega t)$, $P\left(\mathcal{D}^2\right)\cos(\omega t) = P\left(-\omega^2\right)\cos(\omega t)$

例 2.7: 二阶非齐次方程

$$x'' + px' + qx = f(t) \tag{2.48}$$

可以写作:

$$\mathcal{D}^2 x + p\mathcal{D}x + qx = f(t) \tag{2.49}$$

定义 2.4.2: 逆算子

常系数线性微分方程 $P(\mathcal{D})x = f(t)$ 的特解可以表示为:

$$x^* = \frac{1}{P(\mathcal{D})}f(t) \tag{2.50}$$

其中 $\frac{1}{P(\mathcal{D})}$ 称作 $P(\mathcal{D})$ 的逆算子。

例 2.8:

$$\frac{1}{\mathcal{D}^k}[f(t)] = \overbrace{\int\cdots\int}^{k} f(t)\,(\mathrm{d}t)^k \tag{2.51}$$

定理 2.4.1: 特别地, 当 $P(t)$ 为 n 次多项式时, 求特解 $x^* = \frac{1}{P(\mathcal{D})}f(t)$ 的方法为:

1. 将 $P(t)$ 写成 $Q(t)t^m$ 的形式, 其中 $m \in \mathbb{N}$, $Q(t)$ 的常数项非零。

2. 将 $\frac{1}{Q(t)}$ 使用 Taylor 展开, 取其前 $n-m$ 阶得到多项式 $Q^*(t)$.

则 $P^*(\mathcal{D}) = \frac{1}{\mathcal{D}^m}Q^*(\mathcal{D})$ 为逆算子。

例 2.9:

$$2x'' + 2x' + x = t^2 + 2t - 1 \tag{2.52}$$

解: 方法一

$x^* = \frac{1}{2\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+1}\left[t^2+2t-1\right]$. 因为: $\frac{1}{2\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+1} = 1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 + \cdots$, 所以:

$$x^* = (1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2)\left[t^2+2t-1\right] = t^2 - 2t - 1 \tag{2.53}$$

解: 方法二

$x^* = \frac{1}{2\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+1}\left[t^2+2t-1\right]$. 因为 $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$, 所以:

$$\frac{1}{2\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(2\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}\right)^k = 1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 + \sum_{k=3}^{\infty}c_k\mathcal{D}^k \tag{2.54}$$

于是:

$$x^* = \left(1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 + \sum_{k=3}^{\infty}c_k\mathcal{D}^k\right)\left[t^2+2t-1\right] = \left(1-2\mathcal{D}+2\mathcal{D}^2\right)\left[t^2+2t-1\right] = t^2 - 2t - 1 \tag{2.55}$$

常见情形: $f(t) = \mathrm{e}^{at}g(t)$, 其中 $g(t)$ 为实函数。

例 2.10: 求特解：

$$x'' - 2x' + x = t\mathrm{e}^t \tag{2.56}$$

解: 方程的算子形式为 $(\mathcal{D}-1)^2[x] = t\mathrm{e}^t$. 由 $P(\mathcal{D})\left[\mathrm{e}^{at}x(t)\right] = \mathrm{e}^{at}P\left(\mathcal{D}+1\right)\left[x(t)\right]$ 知：

$$P(\mathcal{D})\left[\mathrm{e}^{at}\frac{1}{P(\mathcal{D}+a)}x(t)\right] = \mathrm{e}^{at}P(\mathcal{D}+a)\frac{1}{P(\mathcal{D}+a)}[x(t)] = \mathrm{e}^{at}x(t) \tag{2.57}$$

从而：

$$\frac{1}{P(\mathcal{D})}\left[\mathrm{e}^{at}x(t)\right] = \mathrm{e}^{at}\frac{1}{P(\mathcal{D}+a)}[x(t)] \tag{2.58}$$

所以特解为：

$$x^* = \frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t \tag{2.59}$$

例 2.11: 求特解：

$$x'' - 6x' + 13x = \mathrm{e}^{3t}\sin 2t \tag{2.60}$$

解: 方程为 $\left(\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13\right)[x] = \mathrm{e}^{3t}\sin 2t$，特解为：

$$\begin{aligned}
x^* =& \frac{1}{\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13}\left[\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\right] \\
=& \frac{1}{\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\right) \\
=& \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13}\left[\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\right]\right) \\
=& \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\frac{1}{(\mathcal{D}+3+2\mathrm{i})^2 - 6(\mathcal{D}+3+2\mathrm{i}) + 13}[1]\right) \\
=& \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{D}+4\mathrm{i})}[1]\right) \\
=& \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\frac{1}{4\mathrm{i}\mathcal{D}}\left(1 - \frac{\mathcal{D}}{4\mathrm{i}}\right)[1]\right) \\
=& \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\frac{t}{4\mathrm{i}}\right) \\
=& -\frac{t}{4}\mathrm{e}^{3t}\cos 2t
\end{aligned} \tag{2.61}$$

例 2.12: 求微分方程组的特解：

$$\begin{cases} x' + y' + x + y = 2t \\ x' + 2y' - y = 3t \end{cases} \tag{2.62}$$

解: 算子形式为：

$$\begin{cases} (\mathcal{D}+1)[x] + (\mathcal{D}+1)[x] = 2t \\ \mathcal{D}[x] + (2\mathcal{D}-1)[y] = 3t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \mathcal{D}+1 & \mathcal{D}+1 \\ \mathcal{D} & 2\mathcal{D}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

由 Cramer 法则，解为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}^2 - 1}\begin{pmatrix} 1-5t \\ 3t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ -3t-1 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

第三章　线性常微分方程组

由于微分方程组都可以化为标准方程组1.150，所以线性常微分方程组可以化为对应的标准方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{A}(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$.

与之对应的齐次方程组为：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{3.2}$$

3.1　常系数线性齐次常微分方程组

常系数线性常微分方程组对应的标准方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.3}$$

与之对应地，当 $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ 时，为齐次标准方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3.4}$$

定义 3.1.1: 方阵的指数函数

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义方阵 $\mathbf{A}$ 的指数函数为：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \tag{3.5}$$

定义 3.1.2: 模/范数

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义方阵的范数：

1. $\|\mathbf{A}\| = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
2. $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$
3. $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$

易证，这三种定义等价：$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff \exists M > 0, M\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant M^{-1}\|\cdot\|_1$.

范数满足的性质：

1. 非负性：$\|\mathbf{A}\| \geqslant 0$；当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 时，$\|\mathbf{A}\| = 0$.
2. 三角不等式：$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.
3. Cauchy 不等式：$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$，从而 $\left\|\mathbf{A}^k\right\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^k$.

注记 3.1.1: 矩阵的指数函数

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!} \tag{3.6}$$

是收敛的，这是因为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!}=\mathrm{e}^{\|\mathbf{A}\|} \tag{3.7}$$

注记 3.1.2: 级数

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} \tag{3.8}$$

在任何有限区间上一致收敛，这是因为当 $|t|\leqslant c$ 时：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k\|\mathbf{A}\|^k}{k!}=\mathrm{e}^{c\|\mathbf{A}\|} \tag{3.9}$$

命题 3.1.1: 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，那么 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}}$.

证明: 注意到：$\mathrm{e}^{\mathbf{A}},\mathrm{e}^{\mathbf{B}},\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ 范数收敛，由级数的 Cauchy 求和方式：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^k}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i\mathbf{A}^i\mathbf{B}^{k-i}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mathbf{A}^i}{i!}\frac{\mathbf{B}^{k-i}}{(k-i)!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}^l}{l!}\\&=\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}}\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，$\mathrm{e}^{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}}$. □

命题 3.1.2: $\forall\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ 可逆，且 $\left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathbf{A}}$.

证明: 注意到：$\mathbf{A}$ 和 $-\mathbf{A}$ 可交换，所以：

$$\mathbf{I}_{(n)}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}-\mathbf{A}}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}} \tag{3.11}$$

因此，$\left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathbf{A}}$. □

命题 3.1.3: 若 $\mathbf{P}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\det\mathbf{P}\neq0$，那么 $\mathrm{e}^{\mathbf{PAP}^{-1}}=\mathbf{P}\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$.

证明: 注意到：$\forall k\in\mathbb{N}$, $\left(\mathbf{PAP}^{-1}\right)^k=\mathbf{PA}^k\mathbf{P}^{-1}$，于是：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{PAP}^{-1}\right)^k}{k!}=\mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right)\mathbf{P}^{-1} \tag{3.12}$$

也即 $\mathrm{e}^{\mathbf{PAP}^{-1}}=\mathbf{P}\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$. □

定义 3.1.3: (标准) 基解矩阵

定义方程组3.2的基解矩阵 $\mathbf{\Phi}(t)$ 为由 n 个线性无关的满足方程的列向量函数构成的矩阵函数，标准基解矩阵是指满足 $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}_{(n)}$ 的基解矩阵。

定理 3.1.1: $\mathbf{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ 是方程在3.4的一个标准基解矩阵。

证明: 因为 $\mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ 当 t 在任意闭区间上一致收敛且绝对收敛，所以：

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t) \tag{3.13}$$

又 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\big|_{t=0} = \mathbf{I}_{(n)}$，因此 $\mathbf{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ 是方程在3.4的一个标准基解矩阵，且由 Liouville 公式知 $\det \mathbf{\Phi}(t) = \det\left(\mathbf{\Phi}(0)\mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}}\right) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}} > 0$. □

推论 3.1.1: 方程3.3的通解为：

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{C} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s,\ \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times 1} \tag{3.14}$$

证明: 由线性微分方程组解的结构定理知，方程组3.3的通解为：

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} + \mathbf{x}^*(t) \tag{3.15}$$

其中 $\mathbf{x}^*(t)$ 为特解。用常数变易法求特解：设 $\mathbf{x}^*(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}^*(t)$，代入方程组3.3得：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}^*(t) = \mathbf{f}(t) \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}^*(t) = \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t) \tag{3.16}$$

积分即得证。 □

注记 3.1.3: 对于高阶线性微分方程组，可以将其通过换元，化为一阶的，然后进行求解。

定理 3.1.2: 标准基解矩阵的 Jordan 标准型

根据 Jordan 标准型定理，设 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$，其中 $\mathbf{J} = \mathrm{diag}\,(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \cdots, \mathbf{J}_m)$，每一个 $\mathbf{J}_i \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}$ 是 Jordan 块，那么方程3.4的标准基解矩阵可以写作：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\exp\mathrm{diag}\,(\mathbf{J}_1 t, \mathbf{J}_2 t, \cdots, \mathbf{J}_m t)\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\,\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{J}_1 t}, \mathrm{e}^{\mathbf{J}_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\mathbf{J}_m t}\right)\mathbf{P}^{-1} \tag{3.17}$$

因为：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{J}_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_i t\mathbf{I}_{(n_i)} + t\mathbf{J}_{n_i}(0)\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda_i^l t^l}{l!}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}\mathbf{J}_{n_i}(0)^{k-l} \tag{3.18}$$

注意到：$\mathbf{J}_{n_i}(0)^{n_i} = \mathbf{0}$，于是由 Cauchy 乘积：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathbf{J}_i t} &= \sum_{l=0}^{n_i-1}\frac{t^l}{l!}\mathbf{J}_{n_i}(0)^l \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^k t^k}{k!}\mathbf{I}_{(n_i)} = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{I}_{(n_i)}\sum_{l=0}^{n_i-1}\frac{t^l}{l!}\mathbf{J}_{n_i}(0)^l \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-3}}{(n_i-3)!} & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \frac{t^{n_i-3}}{(n_i-3)!} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.19}$$

因为 $e^{\mathbf{A}t}$ 是标准基解矩阵，又 $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}$，所以 $\mathbf{P}e^{\mathbf{P}}$ 是方程组3.4的一个基解矩阵，这是因为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\right) = \mathbf{PJ}e^{\mathbf{J}t} = \mathbf{PP}^{-1}\mathbf{AP}e^{\mathbf{J}t} = \mathbf{A}\left(\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\right) \tag{3.20}$$

且由 Binet-Cauchy 公式知 $\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}$ 非奇异。

推论 3.1.2: 设方程3.4的矩阵 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准型分解为 $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$，那么基解矩阵 $\mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}$ 的所有列向量都具有以下形式：

$$\mathbf{y}_j(t) = e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{t^k}{k!}\mathbf{r}_{j,k} \tag{3.21}$$

(由上一题中的形式，设 $\mathbf{r}_{j,k}$ 是方阵 $\mathbf{P}$ 中的某些列向量，易证)

定理 3.1.3: 方程3.4中，设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 全体两两不同的特征值为 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant s$，分别对应代数重数 $n_i, 1 \leqslant i \leqslant s$，且 $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$，那么方程3.4的一个基解矩阵为：

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Phi}(t)\\ =&\left(\mathbf{P}_1^{(1)}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{n_1}^{(1)}(t);\quad \mathbf{P}_1^{(2)}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{n_2}^{(2)}(t);\quad \cdots;\quad \mathbf{P}_1^{(s)}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{n_s}^{(s)}(t)\right)\\ &\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{I}_{(n_1)}, e^{\lambda_2 t}\mathbf{I}_{(n_2)}, \cdots, e^{\lambda_s t}\mathbf{I}_{(n_s)}\right)\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中：

$$\mathbf{P}_j^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{t^k}{k!}\mathbf{r}_{j,k}^{(i)} \tag{3.23}$$

是与 λ_i 对应的第 j 个向量多项式 $(1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant n_i)$，$\left\{\mathbf{r}_{j,0}^{(i)} \middle| 1 \leqslant j \leqslant n_i\right\}$ 是线性方程组 $\left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{(n)}\right)^{n_i}\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 的 n_i 个线性无关解 (也即特征值 λ_i 对应的根子空间的一组基)，$\mathbf{r}_{j,k}^{(i)} = \left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{(n)}\right)^k\mathbf{r}_{j,0}^{(i)}$.

证明: 因为：

$$\mathbf{r}_{j,k}^{(i)} = \left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{(n)}\right)^k\mathbf{r}_{j,0}^{(i)},\ 0 \leqslant k \leqslant n_i \tag{3.24}$$

所以：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}_j^{(i)}(t) =&\lambda_i\mathbf{\Phi}_j^{(i)}(t) + e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{n_i-2}\frac{t^k}{k!}\mathbf{r}_{j,k+1}^{(i)}\\ =&\lambda_i\mathbf{\Phi}_j^{(i)}(t) + e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{(n)}\right)\sum_{k=0}^{n_i-2}\frac{t^k}{k!}\mathbf{r}_{j,k}^{(i)}\\ =&\lambda_i\mathbf{\Phi}_j^{(i)}(t) + e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{(n)}\right)\sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{t^k}{k!}\mathbf{r}_{j,k}^{(i)}\\ =&\lambda_i\mathbf{\Phi}_j^{(i)}(t) + \left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{(n)}\right)\mathbf{P}_j^{(i)}(t)\\ =&\mathbf{A\Phi}_j^{(i)}(t)\end{aligned} \tag{3.25}$$

于是 $\mathbf{\Phi}(t)$ 中的每一列都是方程3.4的解。因此，我们只需要证明 $\mathbf{\Phi}(t)$ 中各列线性无关，即可验证其是基解矩阵。根据 Liouville 公式，我们只需证明 $\mathbf{\Phi}(0)$ 非奇异，由于：

$$\mathbf{\Phi}(0) = \left(\mathbf{r}_{10}^{(1)}, \cdots, \mathbf{r}_{n_1 0}^{(1)};\quad \cdots;\quad \mathbf{r}_{10}^{(s)} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_{n_s 0}^{(s)}\right) \tag{3.26}$$

由空间分解第一定理，$\mathbb{C}^{n\times 1} = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} W_{\lambda_i}$，因此 $\mathbf{\Phi}(0)$ 各列线性无关，所以 $\mathbf{\Phi}(t)$ 是基解矩阵。 □

推论 3.1.3: 设 $\mathbf{\Phi}(t)$ 是方程3.2的一个基解矩阵，那么：

1. $\forall \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{P}$ 是解矩阵；当且仅当 $\mathbf{P}$ 可逆时，$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{P}$ 也是基解矩阵。
2. 当且仅当 $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $\mathbf{A}(t)$ 可交换且可逆时，$\mathbf{P}\mathbf{\Phi}(t)$ 也是基解矩阵。

(代入原方程求导，易证)

命题 3.1.4: 若实方程组3.1有复解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathrm{i}\mathbf{v}(t)$，其中 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ 为实向量值函数，那么 $\mathbf{u}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 都是方程组3.1的解。

证明: 代入方程组，因为是实方程，所以：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{u}(t) + \mathrm{i}\mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{A}(t)\left(\mathbf{u}(t) + \mathrm{i}\mathbf{v}(t)\right) \iff \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) \end{cases} \tag{3.27}$$

也即 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ 都是方程组3.1的解。 □

例 3.1: 如果 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$，求方程 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的基解矩阵。

解:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{diag}\left(a_1^k, a_2^k, \cdots, a_n^k\right)t^k = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{a_1 t}, \mathrm{e}^{a_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{a_n t}\right) \tag{3.28}$$

又因为当 $t = 0$ 时上式为 $\mathbf{I}(n)$，所以基解矩阵为 $\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{a_1 t}, \mathrm{e}^{a_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{a_n t}\right)$.

例 3.2: 试求出

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{3.29}$$

的基解矩阵。

解: 注意到：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I}_{(2)} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

且 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 是幂零的，所以：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathrm{e}^{t\mathbf{I}_{(2)}}\mathrm{e}^{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)t} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

于是 $\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 即是基解矩阵。

例 3.3: 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{3.32}$$

解: 先求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根：

$$\begin{vmatrix} \lambda - 6 & 3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4 \tag{3.33}$$

我们可以求得：$\left(\begin{smallmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 有特征向量 $\mathbf{r}_1 = (1, 1)^T, \mathbf{r}_2 = (3, 2)^T$，取：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

于是方程组的通解为：

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} \tag{3.35}$$

例 3.4: 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{3.36}$$

解: 易知特征方程为 $(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$，特征值 $\lambda_1 = -2$(单根)，$\lambda_2 = 1$(二重根)。对 $\lambda_1 = -2$，特征向量 $\mathbf{r}_1 = (0,0,1)^T$. 对于 $\lambda_2 = 1$：

$$\left(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_{(3)}\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 44 & 9 \end{pmatrix}^2 \tag{3.37}$$

因此方程 $\left(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_{(3)}\right)^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$ 有解：

$$\mathbf{r}_{10} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{r}_{20} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

因为：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.39}$$

所以一个基解矩阵为：

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & (11+15x)\,\mathrm{e}^x & 3\mathrm{e}^x \\ 0 & (-7-30x)\,\mathrm{e}^x & -6\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^{-2x} & 100x\mathrm{e}^x & 20\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

于是，通解为：

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 11+15x \\ -7-30x \\ 100x \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

定理 3.1.4: 解的收敛性

方程3.4的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$，当且仅当 $\mathbf{A}$ 的全体特征值 λ_i，有 $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$.

证明: 设 $\mathbf{A}$ 的全体两两不同的特征值为 λ_i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

" $\Longleftarrow$ ": 当任意特征值 λ_i 满足 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 时，$\exists \alpha > 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant s$, $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -\alpha$. 由定理3.1.3知，$\exists M > 0$，对于基解矩阵 $\mathbf{\Phi}(t)$ 中任意一列 $\mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{P}_j^{(i)}(t), 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant n_i$，均有 $\left|\mathbf{P}_j^{(i)}(t)\right| \leqslant M\mathrm{e}^{\alpha t}$. 因此 $\forall 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant n_i$, $\left|\mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{P}_j^{(i)}(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\left|\mathbf{P}_j^{(i)}(t)\right| \leqslant M\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(\lambda_i)+\alpha)t} \leqslant M\mathrm{e}^{-\alpha t} \to 0\ (t \to \infty)$，因此均在 $t \to +\infty$ 处收敛。

" $\Longrightarrow$ "：若对方程3.4任意解 $\mathbf{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$，由于 $\exists \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{0}$. 因此对于定理3.1.3中 $\mathbf{\Phi}(t)$ 的任意一列 $\mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{P}_j^{(i)}(t), 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant n_i$，均有 $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|\mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{P}_j^{(i)}(t)\right| = 0$，因为 $\forall 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant n_i$, $\mathbf{P}_j^{(i)}(t) \not\equiv 0$，所以 $\forall 1 \leqslant i \leqslant s$, $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$. □

3.2 变系数线性微分方程组

当方程组3.1中 $\mathbf{A}(t)$ 不是常矩阵时，称作**一阶变系数微分方程组**，其中 $\mathbf{A}(t), \mathbf{f}(t)$ 均是区间上的连续函数。

引理 3.2.1: 叠加原理

如果 $\varphi_j(t), 1 \leqslant j \leqslant m$ 都是方程组3.2的解，那么它们的线性组合也是方程组3.2的解。(易证)

推论 3.2.1: 一阶线性齐次微分方程组3.1的解集构成了一个线性空间，也即解空间。

定义 3.2.1: 线性相关性

设 $\mathbf{x}_j(t), 1 \leqslant j \leqslant m$ 是定义在区间 I 上的函数。如果存在 m 个不全为零的常数 $C_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} C_i \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{0}$ 在 I 上恒成立，那么称这 m 个函数线性相关；否则称它们线性无关。

引理 3.2.2: 齐次方程组3.2的解空间 S 与 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 同构。

证明: 由叠加原理，易知解空间 S 是线性空间，下面证明 $\dim S = n$. 由解的存在唯一性定理，$\forall t_0 \in I, \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，$S$ 中存在唯一的 $\mathbf{x}(t)$ 使得 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$，因此存在映射 $\mathscr{H} : \mathbb{R}^n \mapsto S$ 使得 $\mathscr{H}(\mathbf{x}_0) = x(t)$. 下面证明 H 是同构映射。

$\forall \mathbf{x}(t) \in S, \exists \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n, \mathscr{H}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t)$，因此是满射。

$\forall \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_0^* \in \mathbb{R}^n$，由解的存在唯一性知 $\mathscr{H}(\mathbf{x}_0) \neq \mathscr{H}\left(\mathbf{x}_0^*\right)$，因此是单射。

由叠加原理和解的唯一性知：$\mathscr{H}\left(\alpha \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{x}_0^*\right) = \alpha \mathscr{H}(\mathbf{x}_0) + \beta \mathscr{H}\left(\mathbf{x}_0^*\right)$，因此是线性映射。

所以 $\mathscr{H} : \mathbb{R}^n \mapsto S$ 是线性双射，也即同构映射，则 $S \simeq \mathbb{R}^n$. □

定理 3.2.1: 齐次方程组3.2有 n 个线性无关解，构成解空间 S 的一组基，称为基本解组或线性无关解组。

证明: 因为 $S(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$(或者 $S(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$)，所以 $dimS = n$. 因此成立。

定义 3.2.2: Wronsky 行列式

对 n 个 n 维向量值函数：$\varphi_j(t) : I \mapsto \mathbb{R}^{n\times 1}, 1 \leqslant j \leqslant n$，定义其 **Wronsky** 行列式为

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{vmatrix} \tag{3.42}$$

推论 3.2.2: 向量值函数线性相关性判别条件:

1. 如果线性相关，则 $\forall t \in I, W(t) = 0$.
2. 如果线性无关，则 $\exists t \in I, W(t) \neq 0$.

定理 3.2.2: Liouville 公式

设齐次方程组3.2的解矩阵为 $\mathbf{\Phi}(t)$，令 $W(t) = \det \mathbf{\Phi}(t)$，也即其 Wronsky 行列式，那么：

$$W(t) = W(t_0) \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} \mathbf{A}(s) \mathrm{d}s} \tag{3.43}$$

证明: 设 $\varphi_j(t) = \left(\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \cdots, \varphi_{nj}\right)^T$ 是 $\mathbf{\Phi}(t)$ 的第 i 列，$1 \leqslant j \leqslant n$. 那么：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \varphi_{1j}(t) \\ \varphi_{2j}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nj}(T) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_j(t) = \mathbf{A}(t)\varphi_j(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}(t)\varphi_{kj}(t) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}(t)\varphi_{kj}(t) \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}(t)\varphi_{kj}(t) \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

因此：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\varphi_{kj}(t) \tag{3.45}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) &= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{k1}(t) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{k2}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}(t)\varphi_{l1}(t) & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}(t)\varphi_{l2}(t) & \cdots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}(t)\varphi_{ln}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{kk}(t)\varphi_{k1}(t) & a_{kk}(t)\varphi_{k2}(t) & \cdots & a_{kk}(t)\varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)W(t) \\
&= \operatorname{tr}\mathbf{A}(t)W(t)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\Longrightarrow \quad W(t) = W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}\mathbf{A}(s)\mathrm{d}s} \tag{3.47}$$

推论 3.2.3: 齐次线性方程组3.2的任意 n 个解，其 Wronsky 行列式要么恒为零，要么恒不为零。

定理 3.2.3: 对于齐次线性方程组3.2的任意 n 个解 $\mathbf{x}_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$，设其 Wronsky 行列式为 $W(t)$，那么：

1. 这组解线性相关 $\iff W(t) = 0, \forall t \in I \iff W(t) = 0, \exists t \in I$.
2. 这组解线性无关 $\iff W(t) \neq 0, \forall t \in I \iff W(t) \neq 0, \exists t \in I$.

引理 3.2.3: 若 $\mathbf{\Phi}(t)$ 是非齐次方程组3.1对应的齐次方程组3.2的一个基解矩阵，$\varphi^*(t)$ 是方程组3.1的一个特解，那么方程组3.1的通解为：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \varphi^*(t) \tag{3.48}$$

其中 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 是任意常向量。

证明: 注意到：对于方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{3.49}$$

设 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \varphi(t)$，则 $\mathbf{y}(t)$ 即是对应的齐次方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \tag{3.50}$$

的解，则 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$。因此 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \varphi^*(t)$. □

定理 3.2.4: 非齐次线性微分方程组的通解定理

设非齐次方程组3.1所对应的齐次方程组3.2有基解矩阵 $\mathbf{\Phi}(t)$，那么方程组3.1的通解为：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s \tag{3.51}$$

其中 $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ 是任意常向量。

证明: 设特解 $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}(t)$，代入原方程得：

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{3.52}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.53}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{C}(t) = \int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s \tag{3.54}$$

于是，通解为：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s \tag{3.55}$$

其中 $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ 是任意常向量。 □

推论 3.2.4: 非齐次方程组3.1的解空间不是线性空间，是线性流形或仿射空间，维数为 $n+1$ 维。

例 3.5: 对二阶线性微分方程

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{3.56}$$

若 $\varphi(t)$ 是一个解，求原方程的通解。

解: 原方程组化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

设 $x(t)$ 是与 $\varphi(t)$ 线性无关的解，由 Liouville 公式得：

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi(t) & x(t)\\ \varphi'(t) & x'(t)\end{vmatrix}=\varphi(t)x'(t)-\varphi'(t)x(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s} \tag{3.58}$$

两边同时除以 $\varphi^2(t)$ 得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x(t)}{\varphi(t)}=\frac{W(t_0)}{\varphi^2(t)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s} \tag{3.59}$$

因此：

$$\frac{x(t)}{\varphi(t)}=\int\frac{W(t_0)}{\varphi^2(t)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t \tag{3.60}$$

由于 $x(t)$ 是任意取的，所以取：

$$x(t)=\varphi(t)\int\frac{1}{\varphi^2(t)}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{3.61}$$

于是，通解为：

$$x(t)=C_1\varphi(t)+C_2\varphi(t)\int\frac{1}{\varphi^2(t)}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{3.62}$$

3.3 Bessel 方程与 Bessel 函数

形如

$$tx''+tx'+\left(t^2-\nu^2\right)x=0 \tag{3.63}$$

其中 $\lambda=\nu^2,\nu\geqslant 0$. 的方程称作 **Bessel 方程**。

定理 3.3.1: 变系数二阶线性常微分方程的广义幂级数解

设 $p(t),q(t)$ 在 t_0 附近可以展开为幂级数，$p^2(t_0)+q^2(t_0)\neq 0$，则 $(t-t_0)^2x''+(t-t_0)p(t)x'+q(t)x=0$ 在 t_0 的邻域内有收敛的广义幂级数解：

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\left(t-t_0\right)^{k+\rho} \tag{3.64}$$

其中 $C_0\neq 0$，ρ 为常数。

定理 3.3.2: Bessel 方程的广义幂级数解

$$tx''+tx'+\left(t^2-\nu^2\right)x=0 \tag{3.65}$$

其中 $\lambda=\nu^2,\nu\geqslant 0$.

解: 由定理，有广义幂级数解 $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kt^{k+\rho}$，且易知 $C_0\neq 0$。代入方程3.63得：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+\rho)^2-\nu^2\right)C_kt^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^{k+\rho+2}=0 \tag{3.66}$$

比较较低幂次的 t^{ρ} 的系数：

$$\left(\rho^2-\nu^2\right)C_0=0\quad(C_0\neq 0)\implies\rho^2-\nu^2=0\implies\rho_{1,2}=\pm\nu \tag{3.67}$$

当 $\rho = \mu \geqslant 0$ 时，令 $x_1(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\nu}$，有：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+\nu)^2-\nu^2\right)C_k t^{k+\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k t^{k+\nu+2}=0 \tag{3.68}$$

比较系数得：

$$\begin{cases} t^{\nu} = \left(\nu^2-\nu^2\right)C_0 = 0 \quad (C_0 \neq 0) \\ t^{\nu+1} = \left((\nu+1)^2-\nu^2\right)C_1 = 0 \implies C_1 = 0 \\ t^{\nu+k} = \left((\nu+k)^2-\nu^2\right)C_k + C_{k-2} = 0 \end{cases} \implies C_k = -\frac{C_{k-2}}{k(k+2\nu)} \quad 2 \mid k \tag{3.69}$$

于是系数的通项公式为：

$$\begin{cases} C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0}{2^{2k}k!\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu+i)} \\ C_{2k+1} = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N} \implies C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)} \tag{3.70}$$

于是方程的一个广义幂级数解为：

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k C_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{3.71}$$

其中 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 为 Gamma 函数，满足 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. 上述解称作**第一类 ν 阶 Bessle 函数**，记作 $J_\nu(t)$。易知：

$$\lim_{t\to0^+} J_\nu(t) = \begin{cases} 0, & \nu > 0 \\ 1, & \nu = 0 \end{cases} \tag{3.72}$$

当 $\rho = -\mu < 0$ 时.

(1) 若 $2\nu \notin \mathbb{N}_+$，则系数递推公式为：

$$C_k = -\frac{C_{k-2}}{k(k-2\nu)} \tag{3.73}$$

类似地，我们得到广义幂级数解：

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{3.74}$$

易知：

$$\lim_{t\to0^+} J_{-\nu}(t) = +\infty \tag{3.75}$$

于是 $J_\nu(t)$ 与 $J_{-\nu}(t)$ 线性无关，Bessel 方程的通解为：

$$x(t) = AJ_\nu(t) + BJ_{-\nu}(t) \tag{3.76}$$

(2) 若 $2\nu = 2m+1, m \in \mathbb{N}$，只需令 C_{2m+1}，仍有 $J_{-\nu}(t)$.

(3) 若 $\nu \in \mathbb{N}+$，易验证 $J_{-m}(t) = (-1)^m j_m(t)$(根据复变函数)，线性相关。此时，另一线性无关解可以用

$$J_m(t)\int J_m^{-2}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{3.77}$$

表示。

解: 另解

(1) 当 $\nu \notin \mathbb{N}$ 时，令:

$$N_\nu(t) = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} J_\nu(t) - \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(t) \tag{3.78}$$

也即**第二类 ν 阶 Bessel 函数**或 **ν 阶 Neumann 函数**。

(2) 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，令 $N_m(t) = \lim\limits_{\nu \to m} N_\nu(t)$. 由 L'Hospital 法则得:

$$\begin{aligned} N_m(t) =& \frac{2}{\pi} J_m(t) \left(\ln \frac{t}{2} + \gamma\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\sum_{l=0}^{m+k-1} \frac{1}{l+1} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l+1}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m} \end{aligned} \tag{3.79}$$

其中 $\gamma \approx 0.5772$ 为 Euler 常数。易知:

$$\lim_{t \to 0^+} N_m(t) = -\infty \tag{3.80}$$

于是 $N_m(t)$ 和 $J_m(t)$ 线性无关。

此时，Bessel 方程的通解为:

$$x(t) = AJ_\nu(t) + BN_\nu(t) \tag{3.81}$$

命题 3.3.1: Bessel 函数的递推公式

对于第一类 Bessel 函数:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{3.82}$$

我们有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{3.83}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{3.84}$$

特别地，当 $\nu = 0$ 时:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} J_0(x) = -J_1(x) \tag{3.85}$$

定义 3.3.1: 半整数阶 Bessel 函数

对于 $2 \mid \nu + 1$ 的情况，我们有:

$$\begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\sin x}{x} \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\cos x}{x} \end{cases} \tag{3.86}$$

推论 3.3.1: 半整数阶第一类和第二类 Bessel 函数都是初等函数。

定理 3.3.3: 整数阶 Bessel 函数的母函数:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \zeta^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \zeta^n \tag{3.87}$$

定理 3.3.4: 整数阶 Bessel 函数的复积分形式与实积分形式:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-z^{-1}\right)}}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \tag{3.88}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(x\sin\theta - n\theta\right) \mathrm{d}\theta \tag{3.89}$$

定理 3.3.5: Bessel 函数在 $x \to +\infty$ 处的渐近表示:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) \tag{3.90}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) \tag{3.91}$$

推论 3.3.2: 变量 x 充分大时，两类 Bessel 函数相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 且均衰减震荡。

推论 3.3.3: 两类 Bessel 函数在正半轴有无穷多个零点。

3.4 Sturm-Liouville 问题

定义 3.4.1: 形如:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right) + \left(q(x) + \lambda r(x)\right) y(x) = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \qquad x \in [a,b] \tag{3.92}$$

的二阶边值问题称作 **Sturm-Liouville** 特征值问题，其中齐次方程称作 Sturm-Liouville 方程。其中 $k(x) > 0, k(x) \in C^1[a,b]$, $q(x), \rho(x) \in C[a,b]$, $q, \rho : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$，且边界条件是非平凡的，且系数是实的。

问题：求适当的 λ 使得上述边值问题具有非零解，对应的非零解就称作特征值 λ 所对应的特征函数 $\varphi(x)$.

命题 3.4.1: 任意的二阶齐次线性微分方程

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{3.93}$$

都可以化成 Sturm-Liouville 方程。

证明: 令 $k(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，化为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right) + k(x)q(x)y(x) = 0 \tag{3.94}$$

命题 3.4.2: S-L 边值问题3.92可以化简成:

$$\begin{cases} X''(t) + \left(\lambda + Q(x)\right) X(x) = 0 \\ X(a)\cos\alpha - X'(a)\sin\alpha = 0 \\ X(b)\cos\beta - X'(b)\sin\beta = 0 \end{cases} \tag{3.95}$$

其中 $\alpha \in [0,\pi), \beta \in (0,\pi]$.

证明: 代换 $y(x) = X(x)a(x), a(x) > 0$，那么：

$$
\begin{aligned}
&(ky')' + (q + \lambda\rho)\, y = 0 \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow y''k + k'y + (q + \lambda\rho)\, y = 0 \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow akX'' + (2a'k + k'a)\, X' + (ka'' + k'a' + (q + \lambda\rho)\, a)\, X = 0 \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow X'' + \frac{2a'k + k'a}{ak} X' + \left(\frac{ka'' + k'a' + qa}{ak} + \frac{\rho}{k}\lambda\right) X = 0
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

于是，令：

$$
\begin{cases}
2a'k + k'a = 0 \\
Q = \frac{ka'' + k'a' + qa}{ak} \\
r = \frac{\rho}{k}
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
a(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \\
Q(x) = \frac{3k'(x) - 2k(x)k''(x) - 2k'^2(x) + 4q(x)k(x)}{4k^2(x)} \\
r(x) = \frac{\rho(x)}{k(x)}
\end{cases}
\tag{3.97}
$$

同时，边界条件化为：

$$
\begin{cases}
(2k(a)\alpha_1 - \beta_1 k'(a))\, X(a) + 2\beta_1 k(a) X'(a) = 0 \\
(2k(b)\alpha_2 - \beta_2 k'(b))\, X(b) + 2\beta_2 k(b) X'(b) = 0
\end{cases}
\tag{3.98}
$$

于是，令：

$$
\begin{cases}
\alpha = \arctan \frac{2\beta_1 k(a)}{\beta_1 k'(a) - 2k(a)\alpha_1} \\
\beta = \arctan \frac{2\beta_2 k(b)}{\beta_2 k'(b) - 2k(b)\alpha_2}
\end{cases}
\tag{3.99}
$$

定义 3.4.2: 定义算子：

$$
\mathcal{L} : \mathcal{L}[\cdot] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[\cdot] + Q(x)[\cdot]
\tag{3.100}
$$

易见，$\mathcal{L}[\bar{\cdot}] = \overline{\mathcal{L}[\cdot]}$，这是因为 $Q : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

定义 3.4.3: 定义内积空间：

$$
L^2[a, b] = \left\{ f(x) \middle| \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty \right\}
\tag{3.101}
$$

以及其上的复内积：

$$
\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x
\tag{3.102}
$$

定义 3.4.4: 定义函数空间：设满足3.95中边界条件且属于 $L^2[a, b] \cap C^2[a, b]$ 的全体函数构成的复线性内积空间为 $\mathcal{H}$.

命题 3.4.3: $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的自共轭算子。

证明: 因为 $\forall f, g \in \mathcal{H}$：

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}[f], g\rangle - \langle f, \}\rangle &= \int_a^b (\{\overline{g} - f\mathcal{L}[\overline{g}])\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left((f'' + Qf)\,\overline{g} - f\left(\overline{g''} + Q\overline{g}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \overline{g}\mathrm{d}f - \int_a^b f\mathrm{d}\overline{g} \\
&= \left(\overline{g}f' - f\overline{g'}\right)\Big|_a^b = \qquad\qquad 0
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

所以 $\langle \mathcal{L}[f], g\rangle - \langle f, \}\rangle$，也即 $\mathcal{L}$ 是自共轭算子。 □

命题 3.4.4: S-L 特征值问题的特征函数构成的特征子空间都是一维复空间。

证明: 设 λ 是3.95的特征值，φ, ψ 都是对应的特征函数，因为方程3.95可以化为：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - Q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \tag{3.104}
$$

所以，由 Liouville 公式，知：

$$
W(\varphi, \psi; x) = W(\varphi, \psi; x) = 0,\ \forall x \in [a, b] \tag{3.105}
$$

也即 φ, ψ 复线性相关，因此特征子空间都是一维复线性空间。 □

推论 3.4.1: 因为 $\mathcal{L}$ 是实的，所以若 φ 是特征函数，那么 $\mathrm{Re}\varphi, \mathrm{Im}\varphi, \overline{\varphi}$ 都是特征函数 (若非零)。

命题 3.4.5: S-L 特征值问题的特征值都是实的。

证明: 设 λ 是 S-L 问题3.95的特征值，φ 是对应的特征函数，那么：

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \mathcal{L}[\varphi], \varphi\rangle - \langle \varphi, \mathcal{L}[\varphi]\rangle \\
&= \langle -\lambda\varphi, \varphi\rangle - \langle \varphi, -\lambda\varphi\rangle \\
&= \left(\overline{\lambda} - \lambda\right)\|\varphi\|^2
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

于是 $\lambda \in \mathbb{R}$. □

推论 3.4.2: 我们只需在实空间理讨论 S-L 问题即可。(我们下面都在实空间里讨论)

定理 3.4.1: S-L 问题不同的特征值对应的特征函数具有正交性。

证明: 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为特征值，φ_1, φ_2 分别是对应这两个特征值的特征函数，那么：

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}[\varphi_1] + \varphi_1 = 0 \\
\mathcal{L}[\varphi_2] + \varphi_2 = 0
\end{cases}
\tag{3.107}
$$

$$
\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1\varphi_2 = \mathcal{L}[\varphi_1]\varphi_2 - \mathcal{L}[\varphi_2]\varphi_1 \tag{3.108}
$$

$$\Longrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_a^b (\mathcal{L}[\varphi_1]\varphi_2 - \mathcal{L}[\varphi_2]\varphi_1)\,\mathrm{d}x \tag{3.109}$$

$$= \left(\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2'\right)\Big|_a^b = 0 \tag{3.110}$$

定理 3.4.2: S-L 问题3.95的特征值 λ 满足，对其任一实特征函数 φ，有：

$$\lambda = \frac{-\varphi^2\big|_a^b + \int_a^b \left(\varphi'^2 - Q\varphi^2\right)\mathrm{d}x}{\|\varphi\|^2} \tag{3.111}$$

证明:

$$\begin{aligned} -\lambda\,\|\varphi\|^2 &= \langle \mathcal{L}[\varphi], \varphi\rangle \\ &= \int_a^b (\varphi'' + Q\varphi)\,\varphi\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \varphi\mathrm{d}\varphi' + \int_a^b Q\varphi^2\mathrm{d}x \\ &= \varphi^2\Big|_a^b - \int_a^b \varphi'^2\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi^2 Q\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{-\varphi^2\big|_a^b + \int_a^b \left(\varphi'^2 - Q\varphi^2\right)\mathrm{d}x}{\|\varphi\|^2} \tag{3.113}$$

定理 3.4.3: S-L 特征值问题3.95的转化与 Prufer 变换的引入

设 $\Phi(x,\lambda)$ 是方程3.95满足第一个初值条件 (不一定满足第二个条件) 的解，由齐次初值问题解的存在性，知 $\varphi(x,\lambda)$ 一定存在，且非零。下面我们需要确定 λ 以使 $\varphi(x,\lambda)$ 满足第二个条件。

引入 Prufer 变换:

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = r(x,\lambda)\sin\theta(x,\theta) \\ \varphi_x'(x,\lambda) = r(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda) \end{cases} \tag{3.114}$$

其中:

$$r(x,\lambda) = \sqrt{\varphi^2 + \varphi'^2}\theta(x,\lambda) = \arctan\frac{\varphi}{\varphi'} \in [0,\pi) \tag{3.115}$$

代入第一个初值条件:

$$\varphi(a,\lambda) = \sin\alpha\varphi'(a,\lambda) = \cos\alpha \tag{3.116}$$

得:

$$\begin{cases} r(a,\lambda) = 1 \\ \theta(a,\lambda) = \alpha \in [0,\pi) \end{cases} \tag{3.117}$$

要使得 $\varphi(x,\lambda)$ 满足第二个条件，等价于要使 $\theta(b,\lambda) = \beta + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. 将 $\theta = \arctan\frac{\varphi}{\varphi'}$ 对 x 求导，并代入3.95:

$$\theta' = \frac{\varphi'^2 - \varphi''\varphi}{\varphi'^2 + \varphi^2} = \frac{r^2\cos^2\theta + (\lambda+Q)\sin^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta + (\lambda+Q)\sin^2\theta \tag{3.118}$$

则:

$$\begin{cases} \theta' = \cos^2\theta + (\lambda+Q)\sin^2\theta \\ \theta(a,\lambda) = \alpha \in [0,\pi) \end{cases} \quad x \in [a,b] \tag{3.119}$$

构成了关于 $\theta(x,\lambda)$ 的初值问题，从而 θ 在 $[a,b]$ 存在，且对 λ 可微 (根据初值问题解对参数的依赖性)。

引理 3.4.1: *方程3.95的解 $\varphi(x,\lambda)$ 当 $x\in(a,b]$ 时关于 λ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增。*

证明: 由3.119知：φ 对参数 λ 的变分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}=(\lambda+Q-1)\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\sin^2\theta \tag{3.120}$$

由 $\theta(a,\lambda)=\alpha$ 知 $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\big|_{(a,\lambda)}=0, \forall\lambda\in\mathbb{R}$，这是因为 ($\alpha$ 不含有 λ)。联立：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}=(\lambda+Q-1)\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\sin^2\theta\\ \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\big|_{(a,\lambda)}=0\end{cases} \tag{3.121}$$

根据一阶线性常微分方程组的初值解，得：

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(x,\lambda)=\int_0^x \mathrm{e}^{\int_t^x(\lambda+Q-1)\sin 2\theta(s,\lambda)\mathrm{d}s}\sin^2\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t \tag{3.122}$$

因为 $\sin^2\theta(x,\lambda)\neq 0$(这是因为 $\varphi(x,\lambda)$ 不恒等于 0)，所以当 $x\in(a,b]$ 时，$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(x,\lambda)>0.$ □

引理 3.4.2: *方程3.95的解 $\varphi(x,\lambda)$ 满足 $\varphi(b,\mathbb{R})=(0,+\infty)$.*

证明: 因为 $\varphi(x,\lambda)$ 当 $x\in(a,b]$ 时对 λ 严格递增，所以只需证明：

$$\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi(x,\lambda)=+\infty\\ \lim\limits_{\lambda\to-\infty}\varphi(b,\lambda)=0\end{cases} \tag{3.123}$$

任取 $\epsilon\in\left(0,\min\left\{\pi-\alpha,\frac{\pi}{2}\right\}\right)$，定义：

$$r(x)=\frac{\pi-\epsilon}{b-a}(b-x)+\frac{\epsilon}{b-a}(x-a) \tag{3.124}$$

那么 $r(x)$ 单减，$r(a)=\pi-\epsilon\geqslant\alpha, r(b)=\epsilon\leqslant\pi-\epsilon=r(a)$.

当 $\lambda<\min\{0,\min Q-1\}$ 时，$Q-1+\lambda<0$. 则：

$$1+(Q(x)-1+\lambda)\sin^2 r(x)\leqslant 1+(\max Q-1+\lambda)\sin^2\epsilon \tag{3.125}$$

当 $|\lambda|$ 充分大时，总可以有：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1+(Q(x)-1+\lambda)\sin^2 r(x)\leqslant-\frac{\pi-2\epsilon}{b-a}=r'(x) \tag{3.126}$$

因为 $0\leqslant\varphi(a,\lambda)=\alpha\leqslant r(a)$，所以当 $|\lambda|$ 充分大时，$0\leqslant\varphi(x,\lambda)\leqslant r(x), \forall x\in[a,b]$，则：

$$0\leqslant\varphi(b,\lambda)\leqslant r(b)=\epsilon \tag{3.127}$$

由 ϵ 的任意性，知 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\varphi(b,\lambda)=0$.

当 $\lambda>\max\{0,\max Q-1\}$ 时，$q-1+\lambda>0$. 则：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1+(Q(x)-1+\lambda)\sin^2 r(x)\geqslant 1+(\min Q-1+\lambda\min)\sin^2\varphi \tag{3.128}$$

当 $|\lambda|$ 充分大时，总可以有：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \geqslant 1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2\varphi \tag{3.129}$$

那么：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2\varphi} \geqslant 1 \tag{3.130}$$

对 x 积分得：

$$b-a \leqslant \int_a^b \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2\varphi} = \int_{\varphi(a,\lambda)}^{\varphi(b,\lambda)} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t} \tag{3.131}$$

$\forall k\in\mathbb{Z}$：

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{\varphi(b,\lambda)} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t} \geqslant & b-a+\int_{k\pi}^{\varphi(a,\lambda)} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t}\\
=& b-a+\int_{k\pi}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t}\\
\geqslant & b-a+\int_{k\pi}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t}\\
=& b-a-2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t}\\
\geqslant & b-a-2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\lambda\frac{2t^2}{\pi^2}}\\
=& b-a-\frac{2k\pi}{\sqrt{2\lambda}}\arctan\sqrt{\frac{\lambda}{2}}
\end{aligned} \tag{3.132}$$

当 $|\lambda|$ 充分大时：

$$\int_{k\pi}^{\varphi(b,\lambda)} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t} \geqslant 0 \tag{3.133}$$

由 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}\lambda\sin^2 t}>0$，所以 $\varphi(b,\lambda)\geqslant k\pi$. 又因为 $k\in\mathbb{Z}$ 是任意的，那么 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi(b,\lambda)=+\infty$. □

定理 3.4.4: 常点情形

设 $k(x)\in C^1[a,b], q(x),\rho(x)\in C[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上恒有 $k(x)>0,\rho(x)>0,q(x)\geqslant 0$，而且：$\alpha_1>0,\beta_1<0,\alpha_2>0,\beta_2>0$，则称特征值问题3.92为常点情形的 **Sturm-Liouville** 型特征值问题。

常点情形的特征值和特征函数有以下性质：

1. 非负性：所有特征值 $\lambda\geqslant 0$.
2. 可数性：全体特征值有可数个，且：$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$. 对应于每一个特征值 λ_i，有且仅有一个线性独立的实特征函数，组成对应的特征函数系 $X_1(x),X_2(x),\cdots$.
3. 正交性：不同特征值对应地特征函数相互加权正交。
4. 完备性：特征函数系 $\{X_n(x)|n\in\mathbb{N}_+\}$ 构成函数空间 $L^2_\rho[a,b]$ 中的完备正交基，即 $L^2_\rho[a,b]$ 中的任意函数都可以由这组基展开成广义 Fourier 级数。(由线性自伴算子的性质)
5. 每一个特征值 λ_n 及其对应的特征函数 $\varphi_n(x)$ 满足：

$$\lambda_n=-\frac{-\left(k(x)\varphi_n(x)\overline{\varphi_n'(x)}\right)\Big|_a^b+\int_a^b\left(k(x)|\varphi_n'(x)|^2-q(x)|\varphi_n(x)|^2\right)\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)|\varphi_n(x)|^2\mathrm{d}x} \tag{3.134}$$

定义 3.4.5: 周期性条件

设 $k(x) \in C^1[a,b], k(a) = k(b), q(x), \rho(x) \in C[a,b]$，且在 $[a,b]$ 上，$k(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) > 0$，则称特征值问题：

$$\mathcal{L}[y(x)] = \lambda y(x) y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b) \tag{3.135}$$

为周期性条件下的 Sturm-Liouville 型特征值问题。

周期性条件下的 Sturm-Liouville 型特征值问题的特征值和特征函数具有类似于常点情形的性质。

区别：周期性条件下，对于每一个非零特征值，有两个相互正交的特征函数 (简并现象)。

例 3.6:

$$\begin{cases} X'(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ X(0) = 0,\ X(1) = 0 \end{cases} \tag{3.136}$$

解: $k(x) \equiv 1, \rho(x) \equiv 1, q(x) = 0$，由常点情形，$\lambda \geqslant 0$.

若 $\lambda = 0$，那么 $X(x) = Ax + B$，代入初值条件得 $X(x) = x$.

若 $\lambda > 0$，设 $\lambda = \omega^2 > 0$，通解为 $X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$，代入初值条件得 $A = 0, \omega = k\pi, k \in \mathbb{N}_+$. 那么特征值有：$\lambda_n /= \omega_n^2 = n^2\pi^2$，对应的特征函数为 $X_n(x) = \sin n\pi x,\ n \in \mathbb{N}_+$.

例 3.7:

$$\begin{cases} X'(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ X(0) = X(1),\ X'(0) = X'(1) \end{cases} \tag{3.137}$$

解: 当 $\lambda = 0$ 时，$X(x) = Ax + B$，代入初值条件得 $X(x) = B$，也即：对应于特征值 $\lambda = 0$ 的特征函数为 $X(x) = 1.0$

当 $\lambda > 0$ 时，特征值 $\lambda_n = 4n^2\pi^2$，对应特征函数 $X_n(x) = \cos 2n\pi$ 或 $X_n(x) = \sin 2n\pi$，因此，其中 $n \in \mathbb{N}$.

第四章　常微分方程的基本理论

4.1　初值问题解的存在唯一性

定义 4.1.1: Lipshitz 条件

设 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在 D 上满足 $|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2)| \leqslant L\,|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$, $L>0$，则称 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在 D 上对 $\mathbf{x}$ 满足 **Lipschitz** 条件，其中 L 称为 **Lipshitz** 常数。

定义 4.1.2: Banach 压缩映射原理

设 X 是完备的度量空间，映射 $\mathcal{A}: X \mapsto X$ 是压缩映射，即 $\exists\theta \in (0,1)$ 使得 $\forall x,y \in X$, $\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\| \leqslant \theta\,\|x-y\|$，则 $\mathcal{A}$ 在 X 中存在唯一的不动点。

证明: 当不动点存在时，易见其唯一，这是因为对于任意两个不同的点，其象必然不能都与原象相同，那么也就不存在多个不动点。我们下面证明存在性。

任取 $x_0 \in X$，并设 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}: x_0 = x, x_k = \mathcal{A}x_{k-1}$，则 $\|x_{k+1}-x_k\| \leqslant \theta^k\,\|\mathcal{A}x_0 - x_0\|$. 由三角形不等式，知 $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列。根据完备度量空间的定义，知 Cauchy 收敛，则 $\exists x \in X$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，代入递推式，即得 $\mathcal{A}x = x$，也即 x 是不动点。 □

定理 4.1.1: Picard 局部存在唯一性定理

若 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在紧致集 $D = \left\{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| |t-t_0| \leqslant a, |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| \leqslant b\right\}$ 内连续，且对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件，则初值问题方程:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

在区间 $I := [t_0-h, t_0+h]$ 上存在唯一解，其中 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = \max\limits_{D} |\mathbf{f}(t,\mathbf{x})|$.

证明: 证明方法一：逐次逼近法。

存在性：易知方程4.1与积分方程:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\,(s,\mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}s \tag{4.2}$$

是等价的。构造 Picard 序列 $\{\mathbf{x}_n(t)\}^{\infty}: \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\,(s,\mathbf{x}_{k-1}(s))\,\mathrm{d}s$, $t \in I$，那么 $\mathbf{x}_k(t) \in C^1 I$，且:

$$|\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_0| = \left|\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\,(s,\mathbf{x}_{k-1}(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant b, \forall t \in I \tag{4.3}$$

因此，$\forall t \in I, k \in \mathbb{N}$, $(t,\mathbf{x}_k(t)) \in D$. 由于 $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0 + \sum\limits_{j=1}^{k}\left(\mathbf{x}_j(t)-\mathbf{x}_{j-1}(t)\right)$，于是我们下面证明：函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_{k-1}(t))$ 在 I 上一致收敛。事实上，由数学归纳法，易知 $|\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_{k-1}(t)| \leqslant$

$\frac{M}{L}\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!}$，那么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_{k-1}(t)|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{ML^{k-1}|t-t_0|^k}{k!}=\frac{M}{L}\left(\mathrm{e}^{Lh-1}\right)$，由 Weierstrass 判别法，函数项级数一致收敛，那么 Picard 序列 $\{\mathbf{x}_n(t)\}^{\infty}$ 一致收敛。设 $\mathbf{x}_n(t)\rightrightarrows\varphi(t)$，那么 $\varphi(t)\in C^1 I$ 满足：$\varphi(t)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}\left(s,\varphi(s)\right)\mathrm{d}s$，也即其是初值问题4.1在 I 上的一个解。

唯一性：假设初值问题4.1存在两个解 $\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t)$，我们下面证明：$\mathbf{x}_1(t)=\mathbf{x}_2(t),\ t\in I$. 令 $K=\max\limits_{I}|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)|$，由初值问题的等价积分方程4.2和 Lipshitz 条件知：

$$|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\left(\mathbf{f}\left(s,\mathbf{x}_1(s)\right)-\mathbf{f}\left(s,\mathbf{x}_2(s)\right)\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}|\mathbf{x}_1(s)-\mathbf{x}_2(s)|\mathrm{d}s\right|\leqslant KL|t-t_0| \tag{4.4}$$

将上面的结果重复代入一次上式，得：

$$|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}|\mathbf{x}_1(s)-\mathbf{x}_2(s)|\mathrm{d}s\right|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}LK\,|t-t_0|\,\mathrm{d}s\right|=\frac{KL^2|t-t_0|^2}{2!} \tag{4.5}$$

由数学归纳法，易知：

$$\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall t\in I,\ |\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)|\leqslant\frac{KL^n|t-t_0|^n}{n!}\leqslant\frac{KL^nh^n}{n!} \tag{4.6}$$

令 $n\to\infty$，即得：$\forall t\in I,\ \mathbf{x}_1(t)=\mathbf{x}_2(t)$. □

证明: 证明方法二：Banach 压缩映射原理。

易见初值问题4.1和积分方程4.2是等价的，为了使用 Banach 压缩映射原理，我们定义函数空间：

$$X=\{\mathbf{x}(t)\in(C(I))^n|\,|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0|\leqslant b\} \tag{4.7}$$

其中 $\forall t\in I,\ |t-t_0|\leqslant\frac{b}{M}$. 并在 X 上定义范数和度量：

$$\|\mathbf{x}(t)\|=\max_{t\in I}\left\{\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}|\mathbf{x}(t)|\right\} \tag{4.8}$$

$$d(\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t))=\|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)\|=\max_{t\in I}\left\{\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)|\right\} \tag{4.9}$$

易验证：X 是一个完备的度量空间，且有不等式：

$$|\mathbf{x}(t)|\geqslant\|\mathbf{x}(t)\| \tag{4.10}$$

在 X 上定义映射：

$$\mathcal{A}:X\mapsto X,\mathcal{A}\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s))\mathrm{d}s \tag{4.11}$$

易知 $\mathcal{A}\mathbf{x}(t)\in C(I)$，且 $\|\mathcal{A}\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0\|=|\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s))\mathrm{d}s|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b$，于是 $\mathcal{A}\mathbf{x}(t)\in X$.

下面证明 $\mathcal{A}$ 是一个压缩映射。由定义知：

$$|\mathcal{A}\mathbf{x}_1(t)-\mathcal{A}\mathbf{x}_2(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\left(\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_1(t))-\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_2(s))\right)\mathrm{d}s\right| \tag{4.12}$$

在两边乘以因子 $\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}$ 得：

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x_1(t)-\mathcal{A}x_2(t)\| = \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\,|\mathcal{A}\mathbf{x}_1(t)-\mathcal{A}\mathbf{x}_2(t)| \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^{t}(\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_1(t))-\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_2(s)))\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-L|t-s|}\mathrm{e}^{-L|s-t_0|}|\mathbf{x}_1(s)-\mathbf{x}_2(s)|\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant L\,\|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)\|\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-L|t-s|}\mathrm{d}s \\
&= \left(1-\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\right)\|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)\| \\
&\leqslant \left(1-\mathrm{e}^{-Lh}\right)\|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)\|
\end{aligned} \tag{4.13}$$

令 $\theta=\left(1-\mathrm{e}^{-Lh}\right)\in(0,1)$，于是 $\mathcal{A}$ 是压缩映射。由压缩映射原理，在函数空间 X 中存在唯一的不动点 $\varphi(t)$ 使得 $\mathcal{A}\varphi(t)=\varphi(t)$，也即 $\varphi(t)$ 是方程4.2的唯一解。 □

定理 4.1.2: Gronwall 不等式

设 $a(t),g(t)\in C[a,b]$, $a(t)>0, g(t)\geqslant 0$, $C\geqslant 0$. 若：

$$g(t)\leqslant C+\begin{cases}\int_{t_0}^{t}a(s)g(s)\mathrm{d}s & t\geqslant t_0\\ -\int_{t_0}^{t}a(s)g(s)\mathrm{d}s & t\leqslant t_0\end{cases} \tag{4.14}$$

则：

$$g(t)\leqslant\begin{cases}C\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s}, & t\geqslant t_0\\ C\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s}, & t\leqslant t_0\end{cases} \tag{4.15}$$

证明: 当 $t\geqslant t_0$ 时，设 $f(t)=C+\int_{t_0}^{t}a(s)g(s)\mathrm{d}s$，那么：

$$\begin{cases}a(t)g(t)\leqslant a(t)f(t)\\ a(t)g(t)=f'(t)\\ f(t_0)=C\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f'(t)\leqslant a(t)f(t)\\ f(t_0)=C\end{cases} \tag{4.16}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s}f(t)\right)\leqslant 0\\ \left.\left(\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s}f(t)\right)\right|_{t_0}=C\end{cases}\Longrightarrow g(t)\leqslant f(t)\leqslant C\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s},\ t\geqslant t_0 \tag{4.17}$$

当 $t\leqslant t_0$ 时，设 $f(t)=C-\int_{t_0}^{t}a(s)g(s)\mathrm{d}s$，那么：

$$\begin{cases}a(t)g(t)\leqslant a(t)f(t)\\ a(t)g(t)=-f'(t)\\ f(t_0)=C\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f'(t)\geqslant -a(t)f(t)\\ f(t_0)=C\end{cases} \tag{4.18}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s}f(t)\right)\geqslant 0\\ \left.\left(\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s}f(t)\right)\right|_{t_0}=C\end{cases}\Longrightarrow g(t)\leqslant f(t)\leqslant C\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a(s)\mathrm{d}s},\ t\leqslant t_0 \tag{4.19}$$

因此，原不等式得证。 □

推论 4.1.1: 利用 Gronwall 不等式证明解的唯一性

在 Picard 定理证明唯一性中，令 $g(t) = |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|, C = 0, a(t) = L$，那么：$0 \leqslant g(t) \leqslant 0$，也即 $\forall t \in I, \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$，则唯一性得证。

推论 4.1.2: Picard 序列误差估计

Picard 序列 $\{\mathbf{x}_n(t)\}^\infty$ 中第 k 项称作初值问题4.1的第 k 次近似解。第 k 次近似解与精确解 $\mathbf{x}(t)$ 在 i 内的误差估计为：

$$|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}(t)| \leqslant \frac{ML^k|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \frac{ML^k h^{k+1}}{(k+1)!} \tag{4.20}$$

(利用数学归纳法，易证)

注记 4.1.1: Picard 存在定理中的区间 $I = [a-h, a+h], h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = \max\limits_{D} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$ 的几何意义：

因为 $M = \max\limits_{D} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$，所以结合方程4.1知，解 $\mathbf{x}(t)$ 满足 $|\mathbf{x}'(t)| \leqslant M$，于是需要 $Mh \leqslant b$，也即 $h \leqslant \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

注记 4.1.2: Lipshitz 条件在实际应用中容易判断的两个充分条件：

1. $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 D 上关于 $\mathbf{x}$ 的梯度矩阵 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 存在且有界。
2. $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 D 上关于 $\mathbf{x}$ 的梯度矩阵 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 连续。

注记 4.1.3: 由 Peano 存在性定理，$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 的连续性保证解的存在性；而 Lipshitz 条件保证了解的唯一性 (充分条件)。

例 4.1: 试求微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t - x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

的解 $x = \varphi(t)$ 的近似解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$，并估计 $\varphi_3(t)$ 在 $t = \frac{1}{2}, 1$ 处与精确解 $\varphi(t)$ 的误差的上界。

解: 易见，$f(t, x)$ 在有界区域内对 x 满足 Lipshitz 条件。

$$\varphi_0(t) = 0 \tag{4.22a}$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t s\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 \tag{4.22b}$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \left(s - \frac{1}{4}s^4\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{20}t^5 \tag{4.22c}$$

$$\varphi_3(t) = \int_0^t \left(s - \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{20}s^7 - \frac{1}{200}s^{10}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{160}t^8 - \frac{1}{4400}t^{11} \tag{4.22d}$$

(1) 当 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时，设 $|x| \leqslant b$，那么 $M = \max\limits_{[0,\frac{1}{2}]\times[-b,b]} |f| = \max\left\{\frac{1}{2}, b^2 - \frac{1}{2}\right\}$. 为了能够对 $t = \frac{1}{2}$ 时进行估计，令 $\frac{b}{M} \geqslant \frac{1}{2}$，解得 $b \in \left[\frac{1}{4}, 1 + \sqrt{2}\right]$. 取 Lipshitz 常数 $L = 2b$，于是 $\forall b \in \left[\frac{1}{4}, 1 + \sqrt{2}\right]$:

$$\left|\varphi_3\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{ML^3 2^{-3-1}}{(3+1)!} = \frac{1}{96}\max\left\{b^3, 2b^5 - b^3\right\} \tag{4.23}$$

当 $b \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ 时，$b^3 \geqslant 2^{-6}$；当 $b \in \left[1, 1+\sqrt{2}\right]$ 时，$2b^5 - b^3 \geqslant 1$. 因此，$\left|\varphi_3\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 3 \cdot 2^{-11} \approx 1.465 \times 10^{-3}$.

(2) 当 $t \in [0,1]$ 时，设 $|x| \leqslant b$，那么 $M = \max\limits_{[0,1]\times[-b,b]} |f| = \max\left\{1, b^2 - 1\right\}$. 为了能够对 $t = 1$ 时进行估计，令 $\frac{b}{M} \geqslant 1$，解得 $b \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. 取 Lipshitz 常数 $L = 2b$，于是 $\forall b \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$：

$$|\varphi_3(1) - \varphi(1)| \leqslant \frac{ML^3}{(3+1)!} = \frac{1}{3}\max\left\{b^3, b^5 - b^3\right\} \tag{4.24}$$

当 $b \in \left[1, \sqrt{2}\right]$ 时，$b^3 \geqslant 1$；当 $b \in \left[\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ 时，$b^5 - b^3 \geqslant 2\sqrt{2}$. 因此，$\left|\varphi_3(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{3}$.

例 4.2: 考察方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\ln|x|, & x \neq 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

其中 f 不满足 Lipshitz 条件 (满足 Osgood 条件)，但是过 xOt 平面中任意一点的解存在且唯一。

证明: 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = -\infty$，所以 $f(t,x)$ 不满足 Lipshitz 条件。但是：
若 $x(t) = 0$ 或 $x(t) = \pm 1$，成立。
否则，由方程 $\frac{\mathrm{d}}{x\ln|x|} = \mathrm{d}t$ 解得：$x(t) = \pm \mathrm{e}^{C\mathrm{e}^t}, C \in \mathbb{R}$.
于是，$x(t)$ 对于给定的任何初值，存在唯一解。

推论 4.1.3: 对于线性方程 $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$，其在 $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ 上存在唯一解。

定义 4.1.3: Osgood 条件 (标量情形)
设 $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant F(|x_1 - x_2|)$，其中 $F(r) > 0$ 连续且 $\int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{F(r)} = +\infty, \forall r_1 > 0$

注记 4.1.4: 若 $F(r) = Lr$，则 $f(t,x)$ 满足 Osgood 条件，即满足 Lipshitz 条件的函数都满足 Osgood 条件。

定理 4.1.3: Osgood 定理
设 $f(t,x)$ 在 D 内对 x 满足 Osgood 条件，则初值问题4.1的解唯一。

证明: 反设解不唯一，设有两个不同的解 $x_1(t), x_2(t)$，使得 $x_1(t_1) \neq x_2(t_1), t_1 \neq t_0$，不妨设 $x_1(t_1) > x_2(t_1), t_1 > t_0$. 令 $r(t) = x_1(t) - x_2(t)$，于是 $r(t) \in C^1[t_0, t_1]$. 取 $\tilde{t} = \sup\{t \in [t_0, t_1] | r(t) = 0\}$，那么 $r(t) > 0, \forall t \in (\tilde{t}, t_1]$.

由 Osgood 条件，当 $t \in (\tilde{t}, t_1]$ 时：

$$r'(t) = x_1'(t) - x_2'(t) = f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) \leqslant F(x_1(t) - x_2(t)) = F(r) \tag{4.26}$$

即 $\frac{\mathrm{d}r}{F(r)} \leqslant \mathrm{d}t$，因此积分得：

$$\int_{r(\tilde{t})}^{r(t_1)} \frac{\mathrm{d}r}{F(r)} \leqslant \int_{\tilde{t}}^{t_1} \mathrm{d}t = t_1 - \tilde{t} < +\infty \tag{4.27}$$

矛盾！ □

4.2 解的延伸

因为 Picard 存在唯一性定理只保证了初值问题4.1在一个小区间

$$I = [t_0 - h, t_0 + h], h = \min\left\{a, \frac{b}{\max_D |f|}\right\} \tag{4.28}$$

上存在唯一解，且易见当 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 的定义域 D 增大时，解的存在唯一区间是单调减小的，比较不合理。

定理 4.2.1: 解的延伸定理

设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在开区域 D 上连续，且 Γ 是方程1.150过 D 内任一点 $P(t_0, \mathbf{x}_0)$ 的任一积分曲线 (不一定唯一)，则 Γ 在 D 内可以延伸到边界 (可以是无穷远处).

证明: 设经过 $P(t_0, \mathbf{x}_0)$ 的积分曲线 $\Gamma : \mathbf{x} = \varphi(t), t \in J$，其中 J 为该解的**最大存在区间**，称 $\varphi(t)$ 是**饱和解**。先考虑右侧最大存在区间 $J^+ = J \cap [t_0, +\infty)$，有以下三种情形：

1. $J^+ = [t_0, +\infty)$，则已经成立。
2. $J^+ = [t_0, t_1], t_0 < t_1 < +\infty$(因为 D 是开的，所以这种情况不能成立).

   证明: 注意到：当 $x \in J^+$ 时，积分曲线仍然在 D 中，所以 $(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \in D$. 由 Picard 存在唯一性定理，知 $\exists [t_1 - h, t_1 + h]$，使得方程1.150过 $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ 的解在 $[t_1 - h, t_1 + h]$ 上存在，那么 $J^+ = [t_0, t_1]$ 不是右侧的最大存在区间，矛盾！
3. $J^+ = [t_0, t_1), t_1 < +\infty$(当且仅当 $\varphi(t_1^-) \notin D$ 时成立).

   证明: 因为 $\varphi(t)$ 在 J^+ 连续，所以若 $\varphi(t)$ 当 $t \to t_1^-$ 时无界，则已经成立.
   若 $\varphi(t)$ 在 J^+ 有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\lim\limits_{t \to t_1^-} \varphi(t)$ 存在。

   当 $\varphi(t_1^-) \in D$, 设 $\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in J^+ \\ \varphi(t_1^-), & t = t_1 \end{cases}$, 那么 $\psi(t)$ 是连续可导的函数，且也是方程1.150过 $(t_0, \mathbf{x}_0)$ 的积分曲线，于是 J^+ 至少可以扩大到 $[t_0, t_1]$，矛盾！
   当 $\varphi(t_1^-) \notin D$ 时，易见积分曲线 $\varphi(t)$ 在 $t \to t_1^-$ 时可以延伸到 ∂D，成立。

类似地，对左侧也有相同的结论。 □

推论 4.2.1: 若 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在开区域 D 连续，且在 D 的任意紧子集上满足 Lipshitz 条件，则方程过 D 内任意一点 $P(t_0, \mathbf{x}_0)$ 存在唯一的积分曲线，且可以延伸到 D 的边界。

证明: 一方面，过 $P(t_0, \mathbf{x}_0)$ 的任一积分曲线都可以延伸到 D 的边界；另一方面，对于过 $P(t_0, \mathbf{x}_0)$ 的任一积分曲线上的任一点 $Q(t_1, \mathbf{x}(t_1))$，在 t_1 的一个闭邻域上该曲线唯一，于是过 P 的积分曲线唯一。 □

例 4.3: 求证：Riccatti 方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + t^2 \tag{4.29}$$

的每一个解的存在区间有限。

证明: 因为 t^2+x^2 在 $\mathbb{R}^2$ 光滑，所以满足 $x(t_0)=x_0$ 的解可以延伸到无穷远处。设 $J^+=(t_0,+\infty)$，令 $a=|t_1|+1\leqslant t<+\infty$ 时：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t^2+x^2\geqslant a^2+x^2\implies\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{a^2+x^2}\geqslant 1 \tag{4.30}$$

于是：

$$\int_a^{+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{a^2+x^2}\mathrm{d}t\geqslant\int_a^{+\infty}1\mathrm{d}t=+\infty \tag{4.31}$$

但左边：

$$\int_a^{+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{a^2+x^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\arctan\frac{x(+\infty)}{a}-\frac{1}{a}\arctan\frac{x(a)}{a}\leqslant\frac{\pi}{a} \tag{4.32}$$

矛盾！因此每一个解的存在区间都是有限的。 □

例 4.4: 讨论方程初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x(x-1)}{1+t^2+x^2}x(t_0)=x_0\in(0,1) \tag{4.33}$$

的解的最大存在区间。

解: 设 $f(t,x)=\frac{x(x-1)}{1+t^2+x^2}, f_x'(t,x)=\frac{(2x-1)\left(1+t^2+x^2\right)-2x^2(x-1)}{\left(1+t^2+x^2\right)^2}$，在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，则满足局部 Lipshitz 条件，故方程在 $\mathbb{R}^2$ 上满足解的存在唯一性定理和解的延伸定理的条件。显然 $x=0,x=1$ 都是 $t\in(-\infty,+\infty)$ 上的解，任取 $t_0\in\mathbb{R},x_0\in(0,1)$，则上述方程组的解 $x=x(t)$ 均为于 0 和 1 之间，因此必然有最大存在区间 $(-\infty,+\infty)$. □

4.3 解对初值和参数的连续性与可微性

对于初值问题4.1，其解可以视作关于 t,t_0,x_0 的函数 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,x_0)$，满足 $\mathbf{x}_0=\varphi(t_0;t_0,x_0)$. 当解存在且唯一时，具有解对初值的对称性：$\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)$ 与 $\mathbf{x}_0=\varphi(t_0;t,\mathbf{x})$ 是等价的。

定义 4.3.1: 解对初值的连续依赖性

设初值问题4.1的解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)$ 在区间 $[a,b]$ 存在。若 $\forall\varepsilon>0,,\exists\delta(\varepsilon,t_0,\mathbf{x}_0)>0$ 使得当 $|t_0^*-t_0|<\delta,|\mathbf{x}_0^*-\mathbf{x}_0|<\delta$ 时，以 $(t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 为初值的解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在且 $|\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)-\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)|<\varepsilon,\ \forall t\in[a,b]$，则称初值问题的解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0^*)$ 在点 $(t_0,\mathbf{x}_0)$ 连续依赖于初值 $t_0^*,\mathbf{x}_0^*$.

特别地，$t=t_0^*$ 时，称解 $\mathbf{x}=\varphi(t;\mathbf{x}_0^*)$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处连续依赖于 $\mathbf{x}_0^*$.

定理 4.3.1: 解对初值的连续依赖性定理

设 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在区域 D 内连续且对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件。若 $(t_0,\mathbf{x}_0)\in D$ 时，初值问题4.1有解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)$，且 $\forall t\in[a,b]$, $\varphi(t_0,\mathbf{x}_0)\in D$，那么以 $(t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 为初值的初值问题的解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 在 $(t_0,\mathbf{x}_0)$ 处连续依赖于 $(t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$.

证明: 第一步：先找出局部解。

设 D 上 $\mathbf{f}$ 对 $\mathbf{x}$ 的 Lipshitz 常数为 $L>0$. $\forall\varepsilon>0,$, $\delta_1\in(0,\varepsilon)$，使得紧集 $U=\{(t,\mathbf{x})|t\in[a,b],|\mathbf{x}-\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)|<\delta_1\}\subset D$ 上，$M\triangleq\max\limits_U|f(t,\mathbf{x})|$. 取 $0<\delta<\frac{\delta_1}{M+1}\mathrm{e}^{-L(b-a)}$，再取闭矩形 $R=\{(t,\mathbf{x})\,||t-t_0|\leqslant\delta,|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leqslant\delta\}\subset U$. 由 Picard 定理，$\forall(t_0^*,\mathbf{x}_0^*)\in R$，在 t_0^* 的某个邻域内初值问题有唯一解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$.

第二步：证明局部不等式成立。

初值问题的解满足积分方程，也即：

$$\begin{cases}\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^t\mathbf{f}\left(s,\varphi(s;t_0,\mathbf{x}_0)\right)\mathrm{d}s\\ \varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)=\mathbf{x}_0^*+\int_{t_0^*}^t\mathbf{f}\left(s,\varphi(s;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)\right)\mathrm{d}s\end{cases}\tag{4.34}$$

将两式相减，利用 Lipshitz 条件，得：

$$\begin{aligned}&|\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)-\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)|\\ \leqslant&|\mathbf{x}_0^*-\mathbf{x}_0|+\left|\int_{t_0}^t\left(\mathbf{f}(s,\varphi(s;t_0^*,\mathbf{x}_0^*))-\mathbf{f}\left(s,\varphi(s;t_0,\mathbf{x}_0)\right)\right)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t_0^*}^{t_0}\mathbf{f}(s,\varphi(s;t_0^*,\mathbf{x}_0^*))\right|\\ \leqslant&\delta+L\left|\int_{t_0}^t|\varphi(s;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)-\varphi(s;t_0,\mathbf{x}_0)|\mathrm{d}s\right|+M|t_0-t_0^*|\\ \leqslant&(M+1)\delta+L\left|\int_{t_0}^t|\varphi(s;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)-\varphi(s;t_0,\mathbf{x}_0)|\mathrm{d}s\right|\end{aligned}\tag{4.35}$$

由 Gronwall 不等式：

$$|\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)-\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)|\leqslant\delta(M+1)\mathrm{e}^{L|t-t_0^*|}\leqslant\delta(M+1)\mathrm{e}^{L(b-a)}\leqslant\delta<\varepsilon\tag{4.36}$$

上述不等式在 t_0 的某一个小邻域内成立。

第三步：证明上述不等式在区间 $[a,b]$ 成立，等价于证明 $\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 在 $[a,b]$ 存在。

我们仅证明 $[t_0^*,b]$ 的情形。由解的唯一性知初值问题的解 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 不能越过曲线 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)\pm\varepsilon\frac{\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)}{|\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)|}$ (也即一直在以 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)$ 为中心的一个管状区域内). 由解的延伸定理知 $\mathbf{x}=\varphi(t;t_0^*,\mathbf{x}_0^*)$ 可以延伸到 ∂D，故其向右延申必由 $t=b$ 穿出 D，因此在 $[t_0^*,b]$ 上存在。 □

定理 4.3.2: *解对初值的连续性定理*

设 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在区域 D 内连续，且对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件，则初值问题4.1的解 $\mathbf{x}=\varphi(t;\mathbf{x}_0)$ 作为对 $t,\mathbf{x}_0$ 的函数，在它的存在范围内关于 $(t,\mathbf{x}_0)$ 连续 (前提条件是 t_0 不变)。

证明: 由 Lipshitz 条件和 Gronwall 不等式得：

$$\begin{aligned}&|\varphi(t;\mathbf{x}_0^*)-\varphi(t;\mathbf{x}_0)|\\ \leqslant&|\mathbf{x}_0^*-\mathbf{x}_0|+\left|\int_{t_0}^t\left(\mathbf{f}(s,\varphi(s;\mathbf{x}_0^*))-\mathbf{f}\left(s,\varphi(s;\mathbf{x}_0)\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\ \leqslant&|\mathbf{x}_0^*-\mathbf{x}_0+L\left|\int_{t_0}^t\left|\varphi(s;\mathbf{x}_0^*)-\varphi(s;\mathbf{x}_0)\right|\mathrm{d}s\right||\\ \leqslant&|\mathbf{x}_0^*-\mathbf{x}_0|\mathrm{e}^{L|t-t_0|}\end{aligned}\tag{4.37}$$

因此，$\forall t_1, t_2 \in I = [t_0 - h, t_0 + h]$，有：

$$\begin{aligned} &\left|\varphi(t_1; \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t_2; \mathbf{x}_0)\right| \\ \leqslant &\left|\varphi(t_1; \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t_2; \mathbf{x}_0^*)\right| + \left|\varphi(t_2; \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t_2; \mathbf{x}_0)\right| \\ \leqslant &\left|\varphi(t_1; \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t_2; \mathbf{x}_0^*)\right| + |\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0|\mathrm{e}^{Lh} \end{aligned} \tag{4.38}$$

令 $t_1 \to t_2, \mathbf{x}_0^* \to \mathbf{x}_0$，则有 $|\varphi(t_1; \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t_2; \mathbf{x}_0)| \to 0$，成立。 □

注记 4.3.1: 当 t_0 变动时，结论也是类似的。

定理 4.3.3: 解对初值和参数的连续依赖性定理

设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ 在区域 D_λ 内连续且在 D_λ 内一致地关于 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件，$(t_0, \mathbf{x}_0, \lambda_0) \in D_\lambda$，$\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \lambda_0)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) \tag{4.39}$$

过点 $(t_0, \mathbf{x}_0)$ 的解，在区间 $t \in [a, b]$ 上有定义，其中 $a \leqslant t_0 \leqslant b$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, a, b) > 0$，使得当 $d\left((t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \lambda), (t_0, \mathbf{x}_0, \lambda_0)\right) < \delta$ 时，方程4.39过点 $(t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ 的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \lambda)$ 在区间 $[a, b]$ 上也有定义，且 $|\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \lambda) - \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \lambda_0)| < \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$.

定理 4.3.4: 解对初值和参数的连续性定理

设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ 在区域 D_λ 内连续，且一致地关于 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件，则方程4.39的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \lambda)$ 作为 $t, t_0, \mathbf{x}_0, \lambda$ 的函数，在存在范围内是连续的。

定理 4.3.5: 解对初值的可微性定理

若函数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 以及 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 都在区域 D 内连续，则方程1.150的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 作为 $t, t_0, \mathbf{x}_0$ 的函数，在存在范围内是连续可微的。

第五章　定性理论初步

5.1　解的稳定性

考虑微分方程1.150，其中 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}\times G), \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$ 对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件。设方程1.150的一个解 $\mathbf{x} = \varphi(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有定义。

定义 5.1.1: 稳定性

设 $\mathbf{x} = \varphi(t), t \in [t_0, +\infty)$ 是方程1.150的一个解，设方程1.150以 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 为初值的解 $\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上有定义。若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ 使得当 $|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$ 时，$\forall t \in [t_0,+\infty), |\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$，则称解 $\mathbf{x} = \varphi(t)$ 是稳定的；反之，则是不稳定的。

若方程1.150的解 $\varphi(t)$ 是稳定的，且 $\exists\delta_1 \in (0,\delta)$ 使得当 $|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta_1$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty} |\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0) - \varphi(t)| = 0$，则称解 $\varphi(t)$ 是渐近稳定的。

例 5.1: 考虑微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm x \\ x(0) = \eta \end{cases} \tag{5.1}$$

的解的稳定性。

解: 若取 + 号，则不稳定；若取 − 号，则渐近稳定。

例 5.2: 讨论系统:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \end{cases} \tag{5.2}$$

的零解的稳定性。

解: 方程有零解，且满足初值条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ 时，解为:

$$\begin{cases} x(t) = x_0\mathrm{e}^t \\ y(t) = y_0\mathrm{e}^t \end{cases} \tag{5.3}$$

注意到：$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\mathrm{e}^t$，随着 t 的增大而趋向 $+\infty$ (若 $(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$)，因此零解是不稳定的。

零解稳定性　判断方程1.150的解 $\mathbf{x} = \varphi(t)$ 的稳定性，只需判断 $\varphi(t) \equiv 0$ 时的稳定性。这是因为:

若 $\mathbf{x}=\varphi(t)$ 是1.150的解，令 $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\varphi(t)$，则 $\mathbf{y}$ 满足方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y}=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{y}+\varphi(t)\right)-\mathbf{f}\left(t,\varphi(t)\right):=\mathbf{F}\left(t,\mathbf{y}\right) \tag{5.4}$$

且 $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ 满足 $\mathbf{F}(t,0)\equiv 0$. 因此我们不失一般性，可以不妨设 $\mathbf{f}(t,0)\equiv 0$，也即只需讨论方程1.150**零解**的稳定性。

5.2 线性近似法

令 $G=\{\mathbf{x}||\mathbf{x}|\leqslant M\}$ 为有界球，在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处进行 Taylor 展开：

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{N}(t,\mathbf{x})=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+o\left(|\mathbf{x}|\right) \tag{5.5}$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 为 n 阶的连续的矩阵函数，$\mathbf{N}(t,\mathbf{x})$ 在 $[t_0,+\infty)\times G$ 上有定义，且 $\lim\limits_{|\mathbf{x}|\to 0^+}\frac{|\mathbf{N}(t,\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|}=0$，$\mathbf{N}(t,\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件，$\forall t\in[t_0,+\infty)$, $\mathbf{N}(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

则方程1.150化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{N}(t,\mathbf{x})\quad \mathbf{N}(t,\mathbf{x})=o(|\mathbf{x}|) \tag{5.6}$$

而方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{5.7}$$

称作方程5.6的**线性化方程**。

定理 5.2.1: *若方程5.6中，$\mathbf{A}(t)\equiv\mathbf{A}$ 为常矩阵 (如果是自治系统5.15，则 $\mathbf{A}(t)$ 一定是常矩阵 $\mathbf{A}$)：*

1. *若 $\mathbf{A}$ 的全体特征值的实部小于零，则方程5.6的零解渐近稳定。*

证明: 设所有特征值的实部满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<\alpha<0$，则 $\exists C>0,\forall t\geqslant t_0,|\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}|<C\mathrm{e}^{\alpha t}$. 因为 $\mathbf{N}(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{N}(t,\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipshitz 条件，所以 $\exists\delta>0$，当 $|\mathbf{x}|<\varepsilon<\frac{\delta}{2C}$ 时，$|\mathbf{N}(t,\mathbf{x})|<\frac{|\alpha|}{2C}|\mathbf{x}|,\forall t\geqslant t_0$. 由于过 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 的解满足积分方程：

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{N}(s,\mathbf{x}(s))\mathrm{d}s \tag{5.8}$$

而当 $|\mathbf{x}|<\delta$ 时：

$$|\mathbf{x}(t)|\leqslant C\mathrm{e}^{\alpha t}|\mathbf{x}_0|+\int_{t_0}^{t}C\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\frac{|\alpha|}{2C}|\mathbf{x}(s)|\mathrm{d}s=C\mathrm{e}^{\alpha t}|\mathbf{x}_0|+\frac{|\alpha|}{2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}|\mathbf{x}(s)|\mathrm{d}s \tag{5.9}$$

令 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}|\mathbf{x}(t)|$，则：

$$\varphi(t)\leqslant C|\mathbf{x}_0|+\frac{|\alpha|}{2}\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{5.10}$$

由 Gronwall 不等式：$\varphi(t)\leqslant C\varepsilon\mathrm{e}^{\frac{|\alpha|}{2}(t-t_0)},\forall t\geqslant t_0$，则：

$$|\mathbf{x}(t)|\leqslant C\varepsilon\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}t}<\frac{\delta}{2},\forall t\geqslant t_0 \tag{5.11}$$

因此，当 $|\mathbf{x}_0|\leqslant\varepsilon<\frac{\delta}{2C}$ 时，$\forall t\geqslant t_0,|\mathbf{N}(t,\mathbf{x})|\leqslant\frac{\beta}{2C}\varepsilon$. □

2. 若 $\mathbf{A}$ 存在一个特征值的实部大于零，则方程5.6的零解不稳定。
3. 若 $\mathbf{A}$ 存在一个特征值的实部为零，且不存在实部大于零的特征值，则方程5.6的零解稳定性与方程5.6的余项 $\mathbf{N}(t,\mathbf{x})$ 有关。

例 5.3: 判断方程组：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sin x + ay - \sin^2 t\left(x^2+y^2\right) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ax - 2y - \sin^2 t\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \tag{5.12}$$

的零解的稳定性。

解: 方程组等价为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x - \sin^2 t\left(x^2+y^2\right) \\ -\sin^2 t\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

令

$$\begin{vmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + a^2 = (\lambda+1)^2 + a^2 - 1 = 0 \tag{5.14}$$

1. 若 $|a| \geqslant 1$，则特征值实部都是 -1，零解是渐进稳定的。
2. 若 $|a| \in (0,1)$，则特征值为 $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a^2} < 0$，零解是渐进稳定的。
3. 若 $|a| = 0$，则特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$，具有零特征值，无法判断。

5.3 Lyapunov 直接方法/第二方法

定义 5.3.1: 自治 (驻定) 系统

称初值问题标准方程组：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5.15}$$

为自治 (驻定) 系统，其标准方程中右侧等号右侧不含自变量 t.

定义 5.3.2: Lyapunov 函数

若标量函数 $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in C(G)$ 满足：$V(\mathbf{0}) = 0; \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, V(\mathbf{x}) > 0$，也即 $V(\mathbf{x})$ 正定，且其沿自治系统5.15的任一积分曲线 Γ 的导数，也称作全导数，满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{x}) = \dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_k}V(\mathbf{x}) \leqslant 0 \tag{5.16}$$

则称 $V(x)$ 为自治 (驻定) 系统5.15的 **Lyapunov** 函数。

定理 5.3.1: Lyapunov 稳定性定理

对于自治系统5.15：

1. 若存在 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x})$，则零解稳定。

   证明: $\forall \varepsilon > 0$，取 $L = \inf\limits_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} |V(\mathbf{x})|$，易见 $L > 0$. 设 $\mathbf{x}(t)$ 为5.15以 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 为初值的解，其中 $0 < |\mathbf{x}_0| \leqslant \delta < \varepsilon$，而由解对初值的连续性，我们令 δ 充分小，使得

$0 < V(x_0) < L$. 因为 $\dot{V(\mathbf{x})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{x}(t)) \leqslant 0$，又由过相平面各点的积分曲线唯一性，知 $\forall t \geqslant 0,\ 0 < V(\mathbf{x}(t)) \leqslant V(\mathbf{x}_0) < L$. 于是必有 $\forall t \geqslant 0,\ |\mathbf{x}(t)| \leqslant \delta < \varepsilon$ (否则与 $B(O,\varepsilon)$ 在 t_1 处相交，则 $V(\mathbf{x}(t_1)) \geqslant L$，矛盾). □

2. 若存在 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x})$，且 $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0$，也即 $\dot{V(\mathbf{x})}$ 负定，则零解渐近稳定。

   证明: 根据上一种情况，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in (0,\varepsilon)$，自治系统5.15以 $\forall \mathbf{x}_0 \in \overline{B(O,\delta)}$ 为初值的解满足 $\forall t \geqslant 0,\ |\mathbf{x}(t)| \leqslant \delta < \varepsilon$. 任取 $\mathbf{x}_0 \in \overline{B(O,\delta)}$，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{x}(t)) < 0$，所以设 $a = \lim\limits_{t\to+\infty} V(\mathbf{x}(t))$，易见 $a \in [0, V(\mathbf{x}_0))$. 我们下面证明：必然有 $a = 0$.
   反设 $a > 0$，那么根据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{x}(t)) < 0$ 知 $\exists \xi \in (0,\delta),\ \forall t \geqslant 0,\ \mathbf{x}(t) \in \overline{B(O,\delta)} \backslash B(O,\xi)$. 又因为 $V(\dot{\mathbf{x}(t)})$ 负定且连续，则在该紧集中有上下界，于是 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(\mathbf{x}(t)) = -\infty$，矛盾！因此 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. □

3. 若存在函数 $V(\mathbf{x})$ 使得 $V(\mathbf{0}) = 0,\ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \dot{V}(\mathbf{x}) > 0$，且在原点的任意邻域内 $V(\mathbf{x})$ 均可以取到正值，则零解不稳定。

注记 5.3.1: 上述判断零解渐近稳定的条件仅是充分条件。

注记 5.3.2: 若上述条件中不等号全部反号，则判断结果是相同的。

注记 5.3.3: Lyapunov 第二方法/直接方法是从系统的能量的角度来判断是否稳定的。

例 5.4: 判断方程组零解的稳定性：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + x^3 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y^3 \end{cases} \tag{5.17}$$

解: 无法用线性近似判断，因为存在零特征值。取 $V(x,y) = x^2 + y^2$，则当 $(x,y) \neq \mathbf{0}$ 时：

$$\dot{V}(x,y) = \left(-y + x^3\right) 2x + \left(x + y^3\right) 2y = 2\left(x^4 + y^4\right) > 0 \tag{5.18}$$

于是零解不稳定。

例 5.5: 判断方程组零解的稳定性：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x\left(x^2 + y^2\right) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2y\left(x^2 + y^2\right) \end{cases} \tag{5.19}$$

解: 无法用线性近似判断，因为存在零特征值。取 $V(x,y) = x^2 + y^2$，则当 $(x,y) \neq \mathbf{0}$ 时：

$$\dot{V}(x,y) = -x\left(x^2 + y^2\right) 2x - 2y\left(x^2 + y^2\right) 2y = -2\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + 2y^2\right) < 0 \tag{5.20}$$

于是零解渐进稳定。

例 5.6: 判断方程组零解的稳定性：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - 3z - x(y - 2z)^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x + 3z - y(x + z)^2 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x - y - z \end{cases} \tag{5.21}$$

解：取 $V(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2$，则当 $(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ 时：

$$\dot{V}(x,y,z)=-2\left(2x^2(y-2z)^2+y^2\left(x^2+z^2\right)+3z^2\right)\leqslant 0 \tag{5.22}$$

因此，零解是稳定的。

注记 5.3.4: 对于具有物理意义的自治系统5.15，可以从其物理意义上考虑构造其 Lyapunov 函数，例如能量。

线性系统的稳定性是系统自身的特性，与输入无关。对于线性系统，小范围 (渐进) 稳定，则大范围 (渐进) 稳定。

例 5.7: 试讨论具有阻尼的单摆运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{5.23}$$

其中 $l,b,g>0$ 为常数。

解：使用线性近似方法。

设 $\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$，将原方程化成一阶的，并在 $(\varphi,\omega)=(0,0)$ 处展开：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega\\ -b\omega-\frac{g}{l}\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\ -\frac{g}{l}&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{g}{l}\left(\varphi-\sin\varphi\right)\end{pmatrix} \tag{5.24}$$

易见，第二项满足 $\mathbf{N}(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$，求解第一个线性项的系数矩阵的特征值，令：

$$0=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\ \frac{g}{l}&\lambda+b\end{vmatrix}=\lambda^2+b\lambda+\frac{g}{l} \tag{5.25}$$

因为 $b,\frac{g}{l}>0$，所以解的实部必定都小于 0，则零解是渐进稳定的。

解：使用 Lyapunov 直接方法。

设 $\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$，将原方程化为：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega\\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-b\omega-\frac{g}{l}\sin\varphi\end{cases} \tag{5.26}$$

根据单摆的总能量公式，取：

$$V(\varphi,\omega)=gl\left(1-\cos\varphi\right)+\frac{1}{2}\omega^2l^2 \tag{5.27}$$

易见，$\forall(\varphi,\omega)\neq\mathbf{0},\ V(\varphi,\omega)>0$，且全导数满足：

$$\dot{V}(\varphi,\omega)=gl\omega\sin\varphi+\omega\left(-b\omega-\frac{g}{l}\sin\varphi\right)l^2=-b\omega^2l^2\leqslant 0 \tag{5.28}$$

因此，方程的零解是稳定的。

例 5.8: 2020 年求赛微分方程

求证：$\forall x_0\in\mathbb{R}$，二阶常微分 Cauchy 问题

$$\begin{cases}x''(t)+x'(t)+x^3(t)=0\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{5.29}$$

的解均是存在、唯一、周期的。

证明：我们只需对方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x-x^3\end{pmatrix}\tag{5.30}$$

证明即可。因为 $\mathbf{f}(x,y)=\left(\begin{smallmatrix}y\\-x-x^3\end{smallmatrix}\right)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任意有界区域上有界，对 (x,y) 满足 Lipshitz 条件，所以过 $\mathbb{R}^2$ 上任意一点，上述方程组均存在唯一解。

易见，上述方程有且仅有唯一稳定解 $(x,y)=\mathbf{0}$. 当初值非平凡时，上述方程的积分曲线满足方程：

$$y\mathrm{d}y+\left(x+x^3\right)\mathrm{d}x=0\tag{5.31}$$

解得：

$$y^2+x^2+\frac{1}{2}x^4=C\tag{5.32}$$

于是，对于初值为 $(x_0,0)$, $x_0\neq 0$ 的解，其积分曲线为：

$$\Gamma: y^2+x^2+\frac{1}{2}x^4=x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4\tag{5.33}$$

所以知任意给定初值的解均有界，t 可以延伸到 ∞.

又因为：

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t}\right)=y^2+x^2+x^4+\frac{1}{4}x^6\geqslant x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4>0\tag{5.34}$$

所以当 $x_0\neq 0$ 时，解是正则的。因为 Γ 光滑有限长，于是 $\forall x_0\neq 0,\exists T>0,\ (x,y)\big|_{t=T}=(x_0,0)$，于是解都是周期的。 □

第二部分

偏微分方程

偏微分方程 PDE：

$$F\left(\mathbf{x}, u, \mathcal{D}u, \cdots, \mathcal{D}^k u\right) = 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5.35}$$

其中 $n \geqslant 2$ (当 $n = 1$ 时即为 ODE)，u 为未知函数。

线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} P_\alpha \mathcal{D}^\alpha u = f(\mathbf{x}) \tag{5.36}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为**多重指标**，$|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. 记为：

$$\mathcal{D}^\alpha \tag{5.37}$$

半线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| = k} P_\alpha \mathcal{D}^\alpha u + G\left(\mathbf{x}, u, \mathcal{D}u, \cdots, \mathcal{D}^{k-1} u\right) = 0 \tag{5.38}$$

拟线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| = k} P_\alpha \left(\mathbf{x}, u, \mathcal{D}u, \cdots, \mathcal{D}^{k-1} u\right) \mathcal{D}^\alpha u + G\left(\mathbf{x}, u, \mathcal{D}u, \cdots, \mathcal{D}^{k-1} u\right) = 0 \tag{5.39}$$

其余的均称作**完全非线性 PDE**.

对于一般情形 (向量情形):

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathcal{D}\mathbf{u}, \cdots, \mathcal{D}^k \mathbf{u}\right) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5.40}$$

其中：

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn^k} \mapsto \mathbb{R}^m,\ \mathbf{u} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \tag{5.41}$$

Dirac 方程 (1928)　设 $\psi = \psi(t, x, y, z)$.

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = \left(-\mathrm{i}\hbar c \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + mc^2 \mathbf{B}\right)\psi \tag{5.42}$$

其中：

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},\ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} & & & -\mathrm{i} \\ & & \mathrm{i} & \\ & i & & \\ \mathrm{i} & & & \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

寻找自由电子平面波解：$\mathbf{\Psi}(t, \mathbf{x}) = \phi(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)/\hbar}$.

解:

$$\sum_{j=1}^{3} \left(cp_j \mathbf{A}_j + mc^2 \mathbf{B}\right)\phi = E\phi \tag{5.44}$$

非零解 ϕ 满足：

$$E^2 - m^2c^4 - c^2|\mathbf{p}|^2 = 0 \iff E = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2|\mathbf{p}|^2} \tag{5.45}$$

第六章　一阶偏微分方程

6.1　一阶线性 PDE

考虑**一阶线性 PDE**：

$$\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla u(\mathbf{x})+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}) \tag{6.1}$$

其中 $b_j(\mathbf{x}),c(\mathbf{x}),f(\mathbf{x})\in C(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$.

定义 6.1.1: 特征线法

思想：寻找一条 1 维的积分曲线，使得在其上可以把 PDE 问题6.87化为 ODE 问题，从而使得只要确定该曲线上一点的初值，就可以确定整个曲线上 $u(\mathbf{x})$ 的取值。又因为全空间上都有积分曲线，所以可以求解 $u(\mathbf{x})$ 在全空间的值。

设待定曲线的参数表示为 $\mathbf{x}(t)$，根据上面的思想，我们令：

$$\frac{\mathrm{d}u(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{d}t}=\nabla u(\mathbf{x}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)=-c(\mathbf{x}(t))u(\mathbf{x}(t))+f(\mathbf{x}(t)) \tag{6.2}$$

于是一阶线性 PDE 问题6.87化为了：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)=\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\mathbf{x}(t))=f(\mathbf{x}(t))-c(\mathbf{x}(t))u(\mathbf{x}(t))\end{cases} \tag{6.3}$$

其中的第一个式子等价于求解 (不含参数)：

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1(\mathbf{x})}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n(\mathbf{x})} \tag{6.4}$$

上述方程称为一阶线性 PDE6.87的特征方程。

定理 6.1.1: 若 $\varphi_j(\mathbf{x})=C_j$, $1\leqslant j\leqslant n-1$，为一阶线性 PDE 的特征方程6.4在 D 内的 $n-1$ 个独立的首次积分，则求解 $u=u\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)$ 的关于 ξ_n 的常微分方程：

$$\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}+cu=f \tag{6.5}$$

即可得到一阶线性 PDE6.87的通解。

特别地，当 $c(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})=0$ 时，一阶线性 PDE6.87的解为

$$u(\mathbf{x})=g\left(\varphi_1(\mathbf{x}),\varphi_2(\mathbf{x}),\cdots,\varphi_{n-1}(\mathbf{x})\right) \tag{6.6}$$

其中 $g:\mathbb{R}^{n-1}\mapsto\mathbb{R}$ 为任意的可微函数，$\xi_j=\varphi_j(\mathbf{x}),\,1\leqslant j\leqslant n$，而 $\varphi_n(\mathbf{x})$ 为满足：

$$\frac{\partial\left(\varphi_1,\cdots,\varphi_n\right)}{\partial\left(x_1,\cdots,x_n\right)}\neq 0 \tag{6.7}$$

的任意函数。

证明: 因为 $\xi_j=\varphi_j(\mathbf{x}),\,1\leqslant j\leqslant n-1$ 是特征方程的首次积分，所以沿着特征方程所确定的每一条积分曲线 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 有：

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_k(\mathbf{x}(t))=\nabla\varphi_k(\mathbf{x}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)=\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\cdot\nabla\varphi_k(\mathbf{x}(t)),\,1\leqslant k\leqslant n-1 \tag{6.8}$$

也即向量场 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 始终是各个首次积分所确定的一簇平面的切向量。又因为首次积分中的积分曲线 $\mathbf{x}(t)$ 在空间各处都存在，且上式最右侧不含对 t 的导数，因此，$\forall\mathbf{x}\in D$：

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x})&=\begin{pmatrix}b_1(\mathbf{x}) & b_2(\mathbf{x}) & \cdots & b_n(\mathbf{x})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\\ \frac{\partial u}{\partial\xi_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial u}{\partial\xi_n}\end{pmatrix}\\
&=\left(\begin{pmatrix}b_1(\mathbf{x}) & b_2(\mathbf{x}) & \cdots & b_n(\mathbf{x})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\\
&=\left(\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla\xi_n(\mathbf{x})\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\\
&=\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial\xi_n}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

于是，已经具有 $n-1$ 个首次积分时，一阶线性 PDE6.87化为关于自变量 ξ_n 的 ODE：

$$\left(\sum_{j=1}^{n}b_j(\mathbf{x})\frac{\partial\xi_n(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}=f(\mathbf{x})-c(\mathbf{x})u\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right) \tag{6.10}$$

所以，上述 ODE 的解 u 即为一阶线性 PDE6.87的解。

当 $c=f=0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial\xi_n}=0$，也即 u 与 ξ_n 无关，于是：

$$u(\mathbf{x})=g\left(\xi_1(\mathbf{x}),\cdots,\xi_{n-1}(\mathbf{x})\right)=g\left(\varphi_1(\mathbf{x}),\cdots,\varphi_{n-1}(\mathbf{x})\right) \tag{6.11}$$

例 6.1: 在第一象限中求解一阶线性偏微分方程：

$$\sqrt{x}u_x+\sqrt{y}u_y+zu_z=0 \tag{6.12}$$

解: 特征方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{x}}=\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{y}}=\frac{\mathrm{d}}{z} \tag{6.13}$$

独立的首次积分为：

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=C_1,\,2\sqrt{y}-\ln z=C_2 \tag{6.14}$$

又因为 $c=f=0$，所以通解为：

$$u(x,y,z)=g\left(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y}-\ln z\right) \tag{6.15}$$

其中 g 为任意的可微函数。

例 6.2: 求解初值问题：

$$\begin{cases} u_t=xu_x+yu_y+u+xy \\ u\big|_{t=0}=a(x,y) \end{cases} \tag{6.16}$$

解: $b_1=1,b_2=-x,b_3=-y,c=-1,f=xy$. 特征方程为：

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{-x}=\frac{\mathrm{d}y}{-y} \tag{6.17}$$

独立的首次积分为：

$$x\mathrm{e}^t=C_1,\ y\mathrm{e}^t=C_2 \tag{6.18}$$

令 $\xi_1(t,x,y)=x\mathrm{e}^t,\xi_2(t,x,y)=y\mathrm{e}^t$，取 $\xi_3(t,x,y)=t$，可以验证其使得 Jacobi 行列式等于 e^{2t}，恒非零。将 u 视作 ξ_1,ξ_2,ξ_3 的函数，得：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial t}=x\mathrm{e}^t\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+y\mathrm{e}^t\frac{\partial u}{\partial\xi_2}+\frac{\partial u}{\partial\xi_3} \\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial x}=\mathrm{e}^t\frac{\partial u}{\partial\xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial y}=\mathrm{e}^t\frac{\partial u}{\partial\xi_2} \end{cases} \tag{6.19}$$

因此，代入原方程第一式，得到关于 ξ_3 的 ODE：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\xi_3}=u+\xi_1\xi_2\mathrm{e}^{-2\xi_3} \tag{6.20}$$

其通解为：

$$u=u\left(\xi_3,\xi_2,\xi_3\right)=\mathrm{e}^{\xi_3}\left(g(\xi_1,\xi_2)+\int\mathrm{e}^{-\xi_3}\xi_1\xi_2\mathrm{e}^{-2\xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)=g(\xi_1,\xi_2)\mathrm{e}^{\xi_3}-\frac{\xi_1\xi_2}{3}\mathrm{e}^{-3\xi_3} \tag{6.21}$$

代入原方程的初值条件得：

$$a(x,y)=u(0,x,y)=g(x,y)-\frac{1}{3}xy\implies g(x,y)=a(x,y)+\frac{1}{3}xy \tag{6.22}$$

代回通解，得原方程的解为：

$$u(t,x,y)=\left(\frac{1}{3}xy\mathrm{e}^{2t}+a\left(x\mathrm{e}^t,y\mathrm{e}^t\right)\right)\mathrm{e}^t-\frac{1}{3}xy\mathrm{e}^{-t} \tag{6.23}$$

例 6.3: 陈祖墀 2-2-3

设 u 是方程 $a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)+u(x,y)=0$ 在 xOy 平面的闭单位圆域 $\Omega=\left\{(x,y)\,\middle|x^2+y^2=1\right\}$ 上属于 C^1 类的解，又设在 $\partial\Omega$ 上 $a(x,y)x+b(x,y)y>0$. 证明：$u\equiv 0$.

证明: 方程的特征线满足特征方程：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x=a(x(t),y(t)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y=b(x(t),y(x)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),y(x))=-u(x(t),y(x)) \end{cases} \tag{6.24}$$

因为 $u(x,y)$ 是在 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的一阶连续可微的解，所以由上述方程第三式知 $z(t)=u(x(t),y(y);x_0,y_0)$ 是无穷阶连续可微的。因为对每一条特征线 Γ 均有：

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\right)\cdot(x,y)\bigg|_{\partial\Omega}=a(x,y)x+b(x,y)y>0 \tag{6.25}$$

所以特征线 Γ 沿其参数 t 一定是严格伸向 Ω 外的。那么，因为 u 在 Ω 上能取到最值，所以过其最值点 (x_0,y_0) 一定存在一条特征曲线 Γ，使得 (x_0,y_0) 也是 $z=u\big|_\Gamma$ 的最值点，则：

1. 若 $(x_0,y_0)\in\Omega^o$ 是最小值点，那么 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\big|_{(x_0,y_0)}=z(x_0,y_0)\geqslant 0$，于是 $\min\limits_\Omega u\geqslant 0$.
2. 若 $(x_0,y_0)\in\Omega^o$ 是最大值点，那么 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\big|_{(x_0,y_0)}=z(x_0,y_0)\leqslant 0$，于是 $\max\limits_\Omega u\leqslant 0$.
3. 若 $(x_0,y_0)\in\partial\Omega$ 是最小值点，那么由于 $\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}\big|_{\partial\Omega}>0$，则 $\frac{\partial z}{\partial t}\big|_{(x_0,y_0)}=-z(x_0,y_0)\leqslant 0$，于是 $\min\limits_\Omega u\geqslant 0$.
4. 若 $(x_0,y_0)\in\partial\Omega$ 是最大值点，那么由于 $\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}\big|_{\partial\Omega}>0$，则 $\frac{\partial z}{\partial t}\big|_{(x_0,y_0)}=-z(x_0,y_0)\geqslant 0$，于是 $\max\limits_\Omega u\leqslant 0$.

综上所述，$\min\limits_\Omega u\geqslant 0\geqslant\max\limits_\Omega u$，所以 $u\big|_\Omega\equiv 0$. □

注记 6.1.1: 在 PDE 中，不定积分的任意常数应该使用关于其他变量的任意函数来代替。

6.2 一阶拟线性 PDE

6.2.1 一阶拟线性 PDE 化为一阶线性齐次 PDE

考虑关于 n 元函数 $u(\mathbf{x})$ 的形如：

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},u)\cdot\nabla u(\mathbf{x})=c(\mathbf{x},u) \tag{6.26}$$

的**一阶拟线性 PDE 方程**。

类似于一阶线性 PDE 的情形，我们考虑在特征线 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 上化为 ODE 进行求解方程6.89，特征方程为：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)=\mathbf{b}(\mathbf{x}(t),u(\mathbf{x}(t)))\\ \frac{\mathrm{d}u(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{d}t}=c\left(\mathbf{x}(t),u(\mathbf{x}(t))\right)\end{cases} \tag{6.27}$$

其**完全特征方程**为：

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1(\mathbf{x},u)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n(\mathbf{x},u)}=\frac{\mathrm{d}u}{c(\mathbf{x},u)} \tag{6.28}$$

由首次积分的理论，其含有 n 个独立的首次积分 $\varphi_j(\mathbf{x},u)=C_j$, $1\leqslant j\leqslant n$. 设6.89的解 $x_{n+1}=u(\mathbf{x})$ 是由隐函数 $V\left(\mathbf{x},x_{n+1}\right)=0$ 所确定的，则由隐函数定理，两边对 $\mathbf{x}$ 的各分量求偏导：

$$0=\frac{\partial}{\partial x_j}V=\frac{\partial V}{\partial x_j}+\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j}\implies\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j}=-\frac{\partial V}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}\right)^{-1},\ 1\leqslant j\leqslant n \tag{6.29}$$

代回拟线性方程6.89得：

$$\sum_{j=1}^n b_j\left(\mathbf{x},x_{n+1}\right)\frac{\partial V}{\partial x_j}+c(\mathbf{x},x_{n+1})\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}=0 \tag{6.30}$$

则化为了关于 V 的一阶线性 PDE(此处也就可以看到完全特征方程6.28的含义，即关于 V 的一阶线性 PDE 的特征方程)。根据一阶线性 PDE 求解，有：

$$V(\mathbf{x},x_{n+1}) = g\left(\varphi_1(\mathbf{x},x_{n+1}),\cdots,\varphi_n(\mathbf{x},x_{n+1})\right) = g\left(\varphi_1(\mathbf{x},u),\cdots,\varphi_n(\mathbf{x},u)\right) \tag{6.31}$$

其中 g 是任意的可微函数。那么拟线性方程6.89的**隐式通解**为：

$$g\left(\varphi_1(\mathbf{x},u),\cdots,\varphi_n(\mathbf{x},u)\right) = 0 \tag{6.32}$$

注记 6.2.1: 上述这种求解一阶拟线性 PDE6.89的方法的实质，就是把拟线性 PDE 化为一阶齐次 PDE，然后令求得的通解等于 0，则用隐函数表示了拟线性方程6.89的解。

例 6.4: 求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} xuu_x + yuu_y + xy = 0 \\ u\big|_{xy=a^2} = h \end{cases} \tag{6.33}$$

解: 完全特征方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{xu} = \frac{\mathrm{d}y}{yu} = -\frac{\mathrm{d}u}{xy} \tag{6.34}$$

得到两个独立的首次积分：

$$\frac{y}{x} = C_1 \tag{6.35a}$$

$$xy + u^2 = C_2 \tag{6.35b}$$

则原方程的隐式通解为：

$$g\left(\frac{y}{x}, xy + u^2\right) = 0 \tag{6.36}$$

代入初值条件 $u\big|_{xy=a^2} = h$ 得：

$$g\left(\frac{a^2}{x^2}, a^2 + h^2\right) = 0,\ \forall x \neq 0 \tag{6.37}$$

注意到：x 取遍 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 的所有值，于是 g 与其第一个自变量无关，那么将 g 视作仅关于其第二个自变量的函数 $g(\cdot)$. 再结合隐式通解，知：

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g\left(xy + u^2\right) = g\left(a^2 + h^2\right) = 0 \tag{6.38}$$

那么 u 的隐式解为：

$$xy + u^2 = a^2 + h^2 \tag{6.39}$$

原方程的显式解为：

$$u(x,y) = \pm\sqrt{a^2 + h^2 - xy},\ (x,y) \in \left\{(x,y)\,\middle|\, xy \leqslant a^2 + h^2\right\} \tag{6.40}$$

问题： 当无法求解首次积分时，如何求解拟线性方程6.89?

6.2.2 一阶拟线性 PDE 的 Cauchy 问题

考虑 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j(\mathbf{x}, u) u_{x_j}(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}, u) \\ u\Big|_{x=\alpha(\mathbf{s})} = \theta(\mathbf{s}) \end{cases} \tag{6.41}$$

其中**初始曲面**的 $n-1$ 维参数表示：

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{s}) = \alpha(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) \tag{6.42}$$

拟线性问题6.41的任一解 $z = u(\mathbf{x})$ 在 $O\mathbf{x}z$ 坐标系中表示一个曲面，其在点 $(\mathbf{x}_0, z_0) = (\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0))$ 处的法向量为：

$$\mathbf{n} = \left(u_{x_1}(x_0), \cdots, u_{x_n}(x_0), -1\right) \tag{6.43}$$

(这是因为：对 $0 = f(\mathbf{x}, z) = u(\mathbf{x}) - z$ 两边同时求梯度，即得到隐曲面的法向量)。再令 $\mathbf{b}(\mathbf{x}, u) = (b_1(\mathbf{x}, u), \cdots, b_n(\mathbf{x}, u))$，则由6.41知**特征方向** $(\mathbf{b}(\mathbf{x}, u), c(\mathbf{x}, u))$ 与 $\mathbf{n}$ 在 $(\mathbf{x}_0, z_0)$ 处垂直，这是因为：

$$\langle (\mathbf{b}, c), \mathbf{n} \rangle \big|_{(\mathbf{x}_0, z_0)} = \sum_{j=1}^{n} b_j(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0)) u_{x_j}(\mathbf{x}_0) - c(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0)) = 0 \tag{6.44}$$

因此，$(\mathbf{b}(\mathbf{x}, u), c(\mathbf{x}, u))$ 是 Cauchy 问题6.41的每个积分曲面的切向量场。我们称其对应的拟线性方程的完全特征方程6.28的解 $(\mathbf{x}, u) = (\mathbf{x}(t), z(t))$ 为 Cauchy 问题的6.41的**特征曲线**，由于 $(\mathbf{b}(\mathbf{x}, u), c(\mathbf{x}, u))$ 是积分曲面的切向量场，所以由完全特征方程知，特征曲线在各点的方向始终是积分曲面的切向，所以特征曲线都在积分曲面上。

定理 6.2.1: 等价性定理

$u(\mathbf{x})$ 为6.41在 D 内的解，当且仅当 $\forall \mathbf{x}_0 \in D$，过 $(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0))$ 的特征曲线都在点 $\mathbf{x}_0$ 位于曲面 $z = u(\mathbf{x})$ 上。

定理 6.2.2: Local Exisitence Theorem/局部存在定理

设 $(\mathbf{x}_0, z_0) = (\alpha(\mathbf{s}_0), \theta(\mathbf{s}_0))$ 且

$$J = \det\left(\mathbf{b}^T(\mathbf{x}_0, z_0), \mathcal{D}_{\mathbf{s}}\alpha(\mathbf{s}_0)\right) = \begin{vmatrix} b_0(\mathbf{x}_0, z_0) & \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n(\mathbf{x}_0, z_0) & \frac{\partial \alpha_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.45}$$

那么初值问题6.41的解在 $\mathbf{x}_0$ 的某邻域内的解存在且唯一，称这样的解为局部解。

证明: 设方程组6.41在初始条件 $(\mathbf{x}, u)\big|_{t=t_0} = (\alpha(\mathbf{s}), \theta(\mathbf{s}))$ 下的解为 $(\mathbf{x}(t, \mathbf{s}), z(t, \mathbf{s}))$. 由于对于特征曲线有：

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(\mathbf{x}(t, \mathbf{s})}{\partial(t, \mathbf{s})}\Bigg|_{(t_0, \mathbf{s}_0)} \neq 0 \tag{6.46}$$

所以由反函数定理，在 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{s}_0)$ 的邻域内由 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{s})$ 得到反函数 $(t, \mathbf{s}) = (\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}))$. 此时，令 $u(\mathbf{x}) = z(\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}))$，那么对于 $\mathbf{x}_0$ 的邻域内的任意一个过点 $(\mathbf{x}^*, u(\mathbf{x}^*))$ 的特征曲线，其在 $\mathbf{x}^*$ 处位于 $u(\mathbf{x}^*)$ 上。我们下面证明解存在且唯一。

一方面,由等价性定理,知 $u(\mathbf{x})$ 满足问题6.41中的第一个方程;而又由 $u(\alpha(\mathbf{s})) = z(t_0, \mathbf{s}) = \theta(\mathbf{s})$ 知 $u(\mathbf{x})$ 满足初始条件，于是 $u(\mathbf{x})$ 是 Cauchy 问题6.41的解。

另一方面，由常微分方程初值问题解的唯一性知，$\mathbf{x}(t, \mathbf{s})$ 和 $z(t, \mathbf{s})$ 也是唯一的。

算法 6.2.1: 求解一阶拟线性 PDE6.89的一般方法：

1. 找初始曲面的参数表示：$u(\alpha(s)) = \theta(\mathbf{s})$，其中 $\mathbf{s}$ 是 $n-1$ 维参数。
2. 验证 $J \neq 0$.
3. 找出6.27符合初始条件 $(\mathbf{x}, z)\big|_{t=t_0} = (\alpha(s), \theta(\mathbf{s}))$ 的参数表示的解 $(\mathbf{x}, z) = (\mathbf{x}(t, \mathbf{s}), z(t, \mathbf{s}))$ (其中 t 是特征曲线的参数).
4. 从 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{s})$ 解出 $(t, \mathbf{s}) = (\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}))$.
5. 从而 $u(\mathbf{x}) = z\left(\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})\right)$.

例 6.5: 求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2,\ y > 0 \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{6.47}$$

解: 初始曲面的 1 维参数表示为：$\alpha(s) = (s, 0)$. $b_1 = b_2 = 1, c = u^2, J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$，则化为常微分方程：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z^2 \\ (x, y, z)\big|_{t=0} = (s, 0, \varphi(s)) \end{cases} \tag{6.48}$$

解得：

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = t \\ z = \frac{z_0}{1 - t z_0} = \frac{\varphi(s)}{1 - t\varphi(s)} \end{cases} \tag{6.49}$$

消去参数 s 得：

$$\begin{cases} t = y \\ s = x - y \end{cases} \implies u(x, y) = z = \frac{\varphi(x-y)}{1 - y\varphi(x-y)} \tag{6.50}$$

例 6.6: 金福临 P309-11

求解一阶 Cauchy 问题：

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + \left(z^2 - x^2\right)\frac{\partial z}{\partial y} + x = 0 \tag{6.51}$$

求其过曲线：

$$l : y = x^2, z = 2x \tag{6.52}$$

的解。

解: 采用参数法。

特征方程为：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = z \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z^2 - x^2 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -x \\ (x, y, z)\big|_{t=0} = \left(s, s^2, 2s\right) \end{cases} \implies \begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ y = \frac{C_1^2 - C_2^2}{2} \sin 2t + C_1 C_2 \cos 2t + C_3 \\ z = C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ (x, y, z)\big|_{t=0} = \left(s, s^2, 2s\right) \end{cases} \tag{6.53}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 2s \\ C_2 = s \\ C_3 = -s^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2s\sin t + s\cos t \\ y = \frac{3}{2}s^2\sin 2t + 2s^2\cos 2t \\ z = 2s\cos t - s\sin t \end{cases} \tag{6.54}$$

注意到：

$$21x^2 - 20y = s^2\left(12\sin t + \cos t\right)^2 \tag{6.55}$$

所以：

$$\left|z - \frac{5}{2}x\right| = \sqrt{\frac{21}{4}x^2 - 5y} \tag{6.56}$$

于是，原方程的解为：

$$z = \begin{cases} \frac{5}{2}x - \sqrt{\frac{21}{4}x^2 - 5y}, & x \geqslant 0 \\ \frac{5}{2}x + \sqrt{\frac{21}{4}x^2 - 5y}, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.57}$$

例 6.7: 金福临 P309-12

求解一阶 Cauchy 问题：

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0 \tag{6.58}$$

过曲线：

$$l : x - y = 0, x - yz = 1 \tag{6.59}$$

的解。

解: 采用化为一阶线性齐次方程的方法。

特征方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = -\frac{\mathrm{d}z}{z^2} \tag{6.60}$$

两个独立的首次积分为：

$$yz = C_1 \tag{6.61a}$$

$$3xyz - y^3 = C_2 \tag{6.61b}$$

于是，原方程的隐式通解为：

$$g\left(yz, 3xyz - y^3\right) = 0 \tag{6.62}$$

其中 g 是任意的可微函数。代入初始条件 $y = x, z = \frac{x-1}{x}$ 得：

$$g\left(x - 1, 3x^2 - 3x - x^2\right) = 0, \forall x \neq 0 \tag{6.63}$$

注意到：$3x^2 - 3x - x^3 = -(x-1)^3 - 1$，所以 $\forall t \neq 1$, $g\left(t, -t^3 - 1\right) = 0$. 则原方程的隐式解为：

$$3xyz - y^3 = -(yz)^3 - 1 \iff y^3\left(z^3 - 1\right) + 3xyz + 1 = 0 \tag{6.64}$$

6.3 一般的一阶偏微分方程

6.3.1 一阶偏微分方程

考虑关于函数 u 的一阶 PDE 的一般形式：

$$F(\mathcal{D}u, u, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } U \tag{6.65}$$

边界条件为：

$$u = g \quad \text{on } \Gamma \tag{6.66}$$

其中 $\Gamma \subset \partial U$，$g : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ 给定，且 F, g 都是光滑函数。其中，$\mathcal{D}(\cdot)$ 等价于 $\nabla(\cdot)$.

6.3.2 全积分、包络与奇积分

定义 6.3.1: $u = u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ 称为6.65的全积分，若：

1. $\forall \mathbf{a} \in A$，$u(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ 满足6.65，其中 $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$ 为参数集合。
2. $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\mathbf{a}}u, \mathcal{D}^2_{\mathbf{xa}}u\right) = n$，其中：

$$\left(\mathcal{D}_{\mathbf{a}}u, \mathcal{D}^2_{\mathbf{xa}}u\right) = \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1a_1} & \cdots & u_{x_na_1} \\ u_{a_2} & u_{x_1a_2} & \cdots & u_{x_na_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1a_n} & \cdots & u_{x_na_n} \end{pmatrix}_{n\times(n+1)} \tag{6.67}$$

(该条件保证了 $u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ 依赖于 n 个独立的参数)

注记 6.3.1: 全积分不一定需要是方程的通解，只要该族函数都是解即可。

例 6.8: 几何光学方程

$|\mathcal{D}u| = 1$

解：全积分为：

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{a}, b) = a \cdot x + b \tag{6.68}$$

其中 $\mathbf{a} \in \partial B_n(O, 1), b \in \mathbb{R}$.

定义 6.3.2: 若可微函数族 $u = u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ 的向量方程 $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ 有可微解 $\mathbf{a} = \phi(\mathbf{x})$，则称 $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}))$ 为 $\{u(\mathbf{x}; \mathbf{a})\}$ 的包络。

定理 6.3.1: 若 $u = u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ 为6.65的解，$v(\mathbf{x})$ 为 $\{u(\mathbf{x}; \mathbf{a})\}$ 的包络，则 $v(\mathbf{x})$ 也满足6.65，称作奇积分。

证明:

$$v_{x_j} = u_{x_j}(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})) + \sum_{k=1}^{n} u_{a_k}(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_j}\phi_k(\mathbf{x}) = u_{x_j}(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})), \forall 1 \leqslant j \leqslant n \tag{6.69}$$

$$\Longrightarrow F(\mathcal{D}v, v, \mathbf{x}) = F\left(\mathcal{D}u\left(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})\right), u\left(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})\right), \mathbf{x}\right) = 0 \tag{6.70}$$

例 6.9: 求方程

$$u^2\left(1+|\mathcal{D}u|^2\right)=1,\, x\in\mathbb{R}^n \tag{6.71}$$

的奇积分。

解: 全积分:

$$u(\mathbf{x};\mathbf{a})=\pm\sqrt{1-|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2}\,|\mathbf{x}-\mathbf{a}|<1 \tag{6.72}$$

则:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}}u(\mathbf{x};\mathbf{a})=\frac{\mp(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\sqrt{1-|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2}}=0\implies \mathbf{a}=\mathbf{x}=\phi(\mathbf{x})\implies v(\mathbf{x})=u(\mathbf{x};\mathbf{x})=\pm 1 \tag{6.73}$$

定义 6.3.3: 若任意可微函数 $\omega: A'\mapsto\mathbb{R}$, $A'\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 满足: $\mathbf{a}',\omega(\mathbf{a}')\in A\subset\mathbb{R}^n$, 则称 $\{u\left(\mathbf{x};\mathbf{a}',\omega(\mathbf{a}')\right)\}$ 的包络 $v'(\mathbf{x})$ 为6.65的通积分。

例 6.10: 求解二维情形的几何光学方程。

解: 全积分为:

$$u(\mathbf{x};\mathbf{a})=x_1\cos a_1+x_2\sin a_1+a+2 \tag{6.74}$$

令 $a_2=\omega(a_1)\equiv 0$，则:

$$u(\mathbf{x};a_1,0)=x_1\cos a_1+x_2\sin a_1 \tag{6.75}$$

$$\mathcal{D}_{a_1}u(\mathbf{x};a_1,0)=-x_1\sin a_1+x_2\cos a_1=0\implies a_1=\arctan\frac{x_2}{x_1} \tag{6.76}$$

于是通积分:

$$v'(\mathbf{x})=u\left(x;\arctan\frac{x_2}{x_1},0\right)=x_1\cos\left(\arctan\frac{x_2}{x_1}\right)+x_2\sin\left(\arctan\frac{x_2}{x_1}\right)=\pm|\mathbf{x}| \tag{6.77}$$

满足 $|\mathcal{D}v'(\mathbf{x})|=1,\,\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

6.3.3 特征方程与 Cauchy 问题

求解一阶 PDE 的特征方法 设方程6.65的特征线的参数表示为: $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$，设:

$$z(t):=u\left(\mathbf{x}(t)\right) \tag{6.78a}$$

$$\mathbf{p}(t):=\mathcal{D}u\left(\mathbf{x}(t)\right) \tag{6.78b}$$

那么，$z(\cdot)$ 给出了 u 沿特征线的取值，$\mathbf{p}(\cdot)$ 给出了 $\mathcal{D}u$ 沿特征线的取值。我们下面来给出一种合适的 $\mathbf{x}(\cdot)$ 的取定方法，使得能够求解 $z(t)$.

为了达成这个目标，对 $\mathbf{p}(t)$ 求微分，得:

$$\dot{p_i}(t)=\sum_{j=1}^{n}u_{x_ix_j}\left(\mathbf{x}(t)\right)\dot{x_j}(t) \tag{6.79}$$

这个表达式还是不够令人满意，因为它含有 u 的二阶偏导数。另一方面，我们同时也来将方程6.65对 x_i 求偏导数:

$$\sum_{j=1}^{n}F_{p_j}\left(\mathcal{D}u,u,\mathbf{x}\right)u_{x_jx_i}+F_z\left(\mathcal{D}u,u,\mathbf{x}\right)u_{x_i}+F_{x_i}\left(\mathcal{D}u,u,\mathbf{x}\right)=0 \tag{6.80}$$

为了消去二阶偏导数，我们令：

$$\dot{x}_j(t) = F_{p_j}\left(\mathbf{p}(s), z(t), \mathbf{x}(t)\right),\ j = 1, 2, \cdots, n \tag{6.81}$$

于是上式化为：

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j}\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) u_{x_i x_j}(\mathbf{x}(t)) + F_z\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) p_i(\mathbf{t}) + F_{x_i}\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) = 0 \tag{6.82}$$

代入对 $p(t)$ 的微分式，消元得：

$$\dot{p}_i(t) = -F_{x_i}\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) - F_z\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) p_i(t),\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{6.83}$$

最后，对 $z(t)$ 求微分，结合上面的计算结果，得：

$$\dot{z}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}\left(\mathbf{x}(t)\right) \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t) F_{p_j}\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) \tag{6.84}$$

综上所述，一阶 PDE6.65的**特征方程** (含有 $2n+1$ 个方程) 为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathcal{D}_{\mathbf{x}} F\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) - \mathcal{D}_z F\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) \mathbf{p}(t) \\ \dot{z}(t) = \mathcal{D}_{\mathbf{p}} F\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) \cdot \mathbf{p}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{D}_{\mathbf{p}} F\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) \end{cases} \tag{6.85}$$

并且，$\mathbf{x}, z, \mathbf{p}$ 还需在特征线上满足原方程：

$$F\left(\mathbf{p}(t), z(t), \mathbf{x}(t)\right) = 0 \tag{6.86}$$

那么，我们只需要同时求解特征方程组6.85和6.86，即可由参数求出一阶 PDE6.65的解 (参数可以消去)。

下面是几类情形下特征方程6.85的简化形式：

1. 当 F 是线性的时，也即方程6.65具有形式：

$$F(\mathcal{D}u, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0 \tag{6.87}$$

时，那么 $F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} + c(\mathbf{x}) z$，于是 $\mathcal{D}_{\mathbf{p}} F = \mathbf{b}(\mathbf{x})$，特征方程6.85的第三式为 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$，第二式为 $\dot{z}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{p}(t)$. 根据沿着特征线成立的方程6.86知，第二式又可以写作 $\dot{z}(t) = -c(\mathbf{x}(s)) z(t)$，其是一个关于 z 的一阶线性 ODE，于是，我们只需要求解：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \\ \dot{z}(t) = -c(\mathbf{x}(t)) z(t) \end{cases} \tag{6.88}$$

2. 当 F 是拟线性的时，也即方程6.65具有形式：

$$F(\mathcal{D}u, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \mathcal{D}u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = 0 \tag{6.89}$$

同理于上，只需求解：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = -c(\mathbf{x}(t), z(t)) \end{cases} \tag{6.90}$$

3. 当 F 是完全非线性时，我们需要完整地求解方程组6.85和6.86.

例 6.11: Hamilton-Jacobi 方程

$$F\left(\mathbf{x},t,u,\mathcal{D}_{\mathbf{x}}u,u_t\right)=u_t+H\left(\mathbf{x},\mathcal{D}_{\mathbf{x}}u\right)=0 \tag{6.91}$$

解: 令 $\mathbf{y}=(\mathbf{x},t),z=u(,t),\mathbf{p}=\mathcal{D}_{\mathbf{x}}u,p_{n+1}=u_t,\mathbf{q}=(\mathbf{p},p_{n+1})$，则

$$F\left(\mathbf{y},z,\mathbf{q}\right)=p_{n+1}+H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) \tag{6.92a}$$

$$\mathcal{D}_{\mathbf{y}}F=\left(\mathcal{D}_{\mathbf{x}}H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right),0\right) \tag{6.92b}$$

$$\mathcal{D}_zF=0 \tag{6.92c}$$

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}F=\left(\mathcal{D}_{\mathbf{p}}H(\mathbf{x},\mathbf{p}),1\right) \tag{6.92d}$$

从而得到特征方程：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\mathrm{x}(s)}{\mathrm{d}s}=\mathcal{D}_{\mathbf{p}}H\left(\mathbf{x}(s),\mathbf{p}(s)\right)\\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{z}(s)}{\mathrm{d}s}=\mathcal{D}_{\mathbf{p}}H\left(\mathbf{x}(s),\mathbf{p}(s)\right)\cdot\mathbf{p}(s)-H\left(\mathbf{x}(s),\mathbf{p}(s)\right)\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(s)}{\mathrm{d}s}=-\mathcal{D}_{\mathbf{x}}H\left(\mathbf{x}(s),\mathbf{p}(s)\right)\end{cases} \tag{6.93}$$

例 6.12: 求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}u_xu_y=u, & x>0\\ u\big|_{x=0}=y^2\end{cases} \tag{6.94}$$

解: $F(\mathbf{p},z,\mathbf{x})=p_1p_2-z,\ z=u(\mathbf{x},t)$，特征方程：

$$\begin{cases}\dot{p}_1=\dot{p}_1\\ \dot{p}_2=\dot{p}_2\\ \dot{z}=2p_1p_2\\ \dot{x}=p_2\\ \dot{y}=p_1\end{cases} \tag{6.95}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}p_1(t)=C_1\mathrm{e}^t\\ p_2(t)=C_2\mathrm{e}^t\\ x(t)=C_2\left(\mathrm{e}^t-1\right)\\ y(t)=y_0+C_1\left(\mathrm{e}^t-1\right)\\ z(t)=z_0+C_1C_2\left(\mathrm{e}^{2t}-1\right)=y_0^2+C_1C_2\left(\mathrm{e}^{2t-1}\right)\end{cases} \tag{6.96}$$

而：$C_2=p_2\big|_{t=0}=u_y\big|_{t=0}=2y\big|_{t=0}=2y_0,C_1C_2=p_1p_2\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}=z_0=y_0^2$，因此 $C_1=\frac{1}{2}y_0$. 于是 $x(t)=2y_0\left(\mathrm{e}^t-1\right),y(t)=\frac{1}{2}y_0\left(\mathrm{e}^t+1\right),z(t)=y_0^2\mathrm{e}^{2t}$，因此 $y_0=y-\frac{1}{4}x,\mathrm{e}^t=\frac{x+4y}{4y-x}$，则解为：

$$u(x,y)=z=\frac{(x+4y)^2}{16} \tag{6.97}$$

例 6.13: 求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_t + u_X^2 = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{6.98}$$

解: 显然有零解 $u_1(x,t) = 0$。而函数

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| > t \\ x - t, & 0 \leqslant x \leqslant t \\ -x - t, & -t \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.99}$$

是 Lipshitz 连续的，且几乎处处满足方程，除了在 3 条线 $x = 0, \pm t$，称为**弱解**。

第七章　偏微分方程的起源与分类

偏微分方程中的算子：

1. $\nabla(\cdot) := \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)$
2. $\Delta(\cdot) := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\cdot)$
3. $\nabla \cdot (\cdot) := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \cdot (\cdot)$

主要的几种高阶方程：

1. 波动方程：$u_{tt} = c^2\Delta u + f$
2. 扩散方程 (热方程)：$u_t = k\Delta u + f, k > 0$
3. 位势方程：
   (a) Poisson 方程：$\Delta u = f$
   (b) Laplace 方程 (调和方程)：$\Delta u = 0$
4. Schodinger 方程：$\mathrm{i}u_t + \Delta u = qu$
5. 极小曲面方程：$\left(1 + u_y^2\right) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(1 + u_x^2\right) u_{yy} = 0$
6. KdV 方程 (浅水中小振幅长波运动)：$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$
7. Monge-Ampre 方程：$\det\left(\mathcal{D}^2 u\right) - k(\mathbf{x})\left(1 + |\mathcal{D}u|^2\right)^{\frac{n+2}{2}} = 0$
8. Maxwell 方程组：$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_t = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$
9. Navier-Stokes 方程组 (流体力学)：$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} - \delta u = -D\rho, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
10. Einstein 方程：$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{g\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$

7.1　三类典型二阶方程的推导

7.1.1　波动方程

一维情形　考虑弦的微小扰动，x 轴为平衡位置，$u(x,t)$ 为 t 时刻 x 位置处弦的位移。任取微元 $[x, x+\Delta x]$，由 Newton 第二定律有：$-\mathbf{T}(x,t) + \mathbf{T}(x+\Delta x, t) + G(x,t,\Delta x) = \rho\Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}$，其中 $\mathbf{T}$ 为弦上的张力。令 T_1, T_2 分别为 T 在 $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ 方向的分量。由于张力沿切向作用，$\frac{T_2}{T_1} = \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$，代入上式有：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = T_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + g(x,t) \tag{7.1}$$

由假设：$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，知张力大小为：

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = T_1\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx T_1 \tag{7.2}$$

弧长 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}u)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$ 不变，则由胡克定律，T 为常数，那么**一维波动方程**为：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{g}{\rho} = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + f \tag{7.3}$$

其中 $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 为波速，f 为单位质量所受外力。

高维情形　设 V 是弹性体区域 D 中的任意一块光滑区域，偏离平衡位置的位移为 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$，加速度为：$\mathbf{u}_{tt}(\mathbf{x}, t)$. 由 Newton 第二定律，$V$ 所受到的合力为：$\int_V u_{tt}\rho\mathrm{d}\mathbf{x}$. 考虑其在边界上受到的体应力和在内部受到的外力，所受应力为：$-\int_{\partial V}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{x}$；所受外力为：$\int_V \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{F}, \mathbf{f}$ 分别为应力 (力的面密度) 和单位外力 (外力的体密度). 由 Stokes 公式，列出方程：

$$\int_V \mathbf{u}_{tt}\rho\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{\partial V}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \int_V \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{7.4}$$

由胡克定律，微小振动中，$F(\nabla u) \approx -k\nabla u, k > 0$，于是：

$$\int_V \mathbf{u}_{tt}\rho\mathrm{d}\mathbf{x} = k\int_V \nabla\cdot\nabla u\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{7.5}$$

其微分形式，即**三维波动方程**为：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = c^2\Delta u + f \tag{7.6}$$

其中 $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ 为波速，f 为单位质量所受外力。

例 7.1: Strauss 1.3.2

A flexible chain of length l is hanging from one end $x = 0$ but oscillates horizontally. Let the x axis point downward and the u axis point to the right. Assume that the force of gravity ar each point of the chain equals the weight of the part of the chain below the point and is direted tangentially along the chain. Assume that the oscillations are small. Fine the PDE satisfied by the chain.

解: 设线密度为常数 $\lambda > 0$. 由 Newton 第二定律，取微元 $[x, x + \Delta x]$：

$$\begin{aligned}\lambda\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} =& T(x + \Delta x, t)\tan\theta(x + \Delta x) - T(x, t)\tan\theta(x)\\ =&(l - x - \Delta x)\lambda g\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - (l - x)\lambda g\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\\ =&(l - x)\lambda g\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) - \lambda g\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}\end{aligned} \tag{7.7}$$

令 $\Delta x \to 0$ 得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (l - x)g\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g\frac{\partial u}{\partial x} \tag{7.8}$$

7.1.2 热方程/扩散方程

令 $u(x,t)$ 为物体在 t 时刻 x 位置的温度，$\mathbf{J}$ 为热流速度，f 为单位体积的热源供热速率，设比热系数为 c. 任取 D 的子区域 V，有：

$$\int_V cu_t \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V cu\mathrm{d}V = -\int_{\partial V} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_V f\mathrm{d}V = \int_V (-\nabla\cdot\mathbf{J} + f)\,\mathrm{d}V \tag{7.9}$$

其微分形式为：

$$cu_t = \nabla\cdot\mathbf{J} + f \tag{7.10}$$

不妨设 $c=1$，由 Fourier 热传导定律，$\mathbf{J} = -k\nabla u, k>0$，于是**热方程**为：

$$u_t = k\Delta u + f \tag{7.11}$$

例 7.2: Strauss 1.3.4

Suppose that some particles which are suspended in a liquid medium would be pulled down at the const velocity $V>0$ by gravity in the absence of diffusion. Taking ccount of the diffusion, find the equation for the concentration of particles. Assume homogeneity in the horizontal directions x and y. Let the z axis point upwards.

解: 由于浓度对 x 和 y 满足齐性，所以我们设 z 位置在 t 时刻的浓度为 $u(z,t)$. 设扩散系数 $k>0$. 对于 $[z,z+\Delta z]$ 中的一段溶液有：上下表面的扩散作用、溶质在重力作用下下降。在单位时间 $\Delta t(V\Delta t \ll \Delta z)$ 中：

$$\Delta z\left(u(z,t+\Delta t) - z(z,t)\right) = u(z+\Delta z,t)V\Delta t - u(z,t)V\Delta t + k\Delta t\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z+\Delta z} - k\Delta t\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z} \tag{7.12}$$

令 $\Delta z, \Delta t\to 0$，得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V\frac{\partial u}{\partial z} + k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{7.13}$$

7.1.3 位势方程

在静电场 D 中，设 f 为电荷密度，$\mathbf{E}$ 为电场强度，ε 为介电系数。任意的子区域 V 中：

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V = \int_{\partial V}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon}\int_V f\mathrm{d}V \tag{7.14}$$

其微分形式为：$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{f}{\varepsilon}$. 因为电场是无旋场，电势满足：$\nabla\varphi = -\mathbf{E}$，于是**位势方程**为：

$$\Delta\varphi = -\frac{f}{\varepsilon} \tag{7.15}$$

7.2 定解问题与适定性

定解条件有：

1. 初值条件：
   (a) 波动方程：初始位移 $u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x})$ 以及初始速度 ,$u_t\big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x})$.
   (b) 热方程：初始温度 $u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x})$.

2. 边界条件：
   (a) Dirichlet 边界条件 (第一类边界条件)：$u\big|_{\partial D} = \varphi$.
   (b) Neumann 边界条件 (第二类边界条件)：$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\big|_{\partial D} = \psi$.
   (c) Robin 条件 (第三类边界条件)：$\left(au + b\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\big|_{\partial D} = R$.

定义 7.2.1: Hadmadard 适定性
称 PDE 定解问题的一个解是适定的，若其是存在、唯一、稳定的。

例 7.3: 反例
考虑反向热问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t \leqslant T \\ u\big|_{t=T} = \frac{\sin(Nx)}{N}, & n \gg 1 \end{cases} \tag{7.16}$$

解: 易见，解为：$u_N(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{N^2(T-t)}\sin(Nx)}{N}$，但是当 $N \to= \infty$ 时，在 $0 \leqslant t < T$ 区间上的解是不稳定的。

7.3 二阶 PDE 的分类以及标准型

7.3.1 一般理论

考虑 n 个自变量的二阶偏微分方程：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + f(\mathbf{x}, u, \mathcal{D}u) = 0 \tag{7.17}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$，$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))_{n\times n}$ 是实对称方阵。

方程7.17的**线性主部** $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j}$ 是方程分类的关键。

方程7.17在 $\mathbf{x}^0$ 点的分类方法

1. 若 $\mathbf{A}(\mathbf{x}^0)$ 的全体特征值非零，且仅有一个异号，则为**双曲型**。(以波动方程为例)
2. 若 $\mathbf{A}(\mathbf{x}^0)$ 的全体特征值非零，且异号个数大于 1，则为**超双曲型**。
3. 若 $\mathbf{A}(\mathbf{x}^0)$ 有一个特征值为零，则为**抛物型**。(以热方程为例)
4. 若 $\mathbf{A}(\mathbf{x}^0)$ 的所有特征值非零且异号，则为**椭圆型**。(以位势方程为例)

方程7.17在 $\mathbf{x}^0$ 的标准型 若经自变量的某种线性变换 $\xi = \mathbf{B}\mathbf{x}$ 后由7.17得到的方程：

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ii}(\mathbf{x}^0)u_{\xi_i \xi_j} + F(\xi, u, \mathcal{D}u) = 0,\ m \leqslant n \tag{7.18}$$

其中 $A_{ii}(\mathbf{x}^0) = \pm 1$，则称上式为方程7.17在 $\mathbf{x}^0$ 点的**标准型**。

注记 7.3.1: 此类线性变换是可逆的，但并非唯一。

7.3.2 两个自变量方程的化简

考虑两个自变量的二阶偏微分方程：

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{7.19}$$

令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，不妨设 $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$(否则为一阶)，则

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{7.20}$$

易知有两个实根。判别方法为：

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} > 0, & \text{双曲型} \\ = 0, & \text{抛物型} \\ < 0, & \text{椭圆型} \end{cases} \tag{7.21}$$

作变换：

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \tag{7.22}$$

满足 Jacobi 行列式：

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.23}$$

则在可逆变换下方程7.19的线性主部变为：

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} \tag{7.24}$$

其中：

$$\begin{cases} A_{11} = a_1 1\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ A_{22} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\eta_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \end{cases} \tag{7.25}$$

注意到上式的第一式和第三式的形式，则如果偏微分方程：

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{7.26}$$

有两个特解 $\xi(x, y), \eta(x, y)$，则 $A_{11} = A_{22} = 0$，那么7.24的右侧只剩下一项 $2A_{12}u_{\xi\eta}$，因此称上式7.26为方程7.19的**特征方程**。

定理 7.3.1: 设 $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$，则 $z = \varphi(x, y)$ 为7.26的充分必要条件是：$\varphi(x, y) = h$ 为常微分方程

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}(\mathrm{d}x)^2 = 0 \tag{7.27}$$

的通积分。

证明: 若 $\varphi(x, y(x)) = h$ 为上述 ODE 的通积分，设 $\varphi_y \neq 0$，对 x 微分，有：

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \tag{7.28}$$

代入 ODE7.27即得到特征方程7.26。

反之，若 $z = \varphi(x, y)$ 为7.26的解，则对 $\varphi(x, y(x)) = h$ 求微分得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$，代入7.26得 ODE7.27. □

由上述定理，常微分方程7.27也称为 PDE7.19的**特征方程**。

称 $\varphi(x, y(x)) = h$ 为7.27的**特征 (曲) 线**。

称由7.27得到的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 为方程7.19的**特征方向**。

根据 ODE 特征方程7.27得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{7.29}$$

双曲型：$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

7.29有两个互异的特征方向，积分得到两族实特征线 $\varphi_1(x, y) = h_1, \varphi_2(x, y) = h_2$，满足 $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$. 令 $\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y)$，由定理知 $A_{11} = A_{22} = 0, A_{12} \neq 0$，方程7.19化为：

$$u_{\xi\eta} + \frac{f}{2A_{12}} := u_{\xi\eta} F_1\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0 \tag{7.30}$$

称作**双曲型第二标准型**。

再令 $s = \frac{\xi+\eta}{2}, t = \frac{\xi-\eta}{2}$，则上述方程化为：

$$u_{tt} - u_{ss} + F\left(t, s, u, u_t, u_s\right) = 0 \tag{7.31}$$

称作**双曲型第一标准型**。

抛物型：$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

若 $a_{11} = 0$，则 $a_{12} = 0$，此时方程7.19是标准型。

若 $a_{11} \neq 0$，不妨设 $a_{11}, a_{12}, a_{22} > 0$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12}}{a_{11}} > 0$. 积分后得到一族实特征线 $\varphi(x, y) = h$. 令 $\xi = \varphi(x, y)$，另取 $\eta = \eta(x, y)$ 满足 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$ (例如，可以取 $\eta = x$ 或 $\eta = y$). 那么：

$$\begin{cases} A_{11} = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{12}\xi_y}\right)^2 = 0 \\ A_{12} = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{12}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{12}}\eta_y\right) = 0 \end{cases} \tag{7.32}$$

另外，$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \neq 0$，从而方程7.19化为：

$$u_{\eta\eta} + \frac{f}{A_{22}} := u_{\eta\eta} + F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0 \tag{7.33}$$

椭圆型： $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$

由7.26得到两族共轭复特征线 $\varphi_1(x,y)+\mathrm{i}\varphi_2(x,y) = h_1, \varphi_1(x,y)-\mathrm{i}\varphi_2(x,y) = h_2$，满足 $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$. 令 $\xi = \varphi_1(x,y), \eta = \varphi_2(x,y)$，则将 $\xi+\mathrm{i}\eta$ 代入7.26得到：$A_{11} = A_{22} \neq 0$, $A_{12} = 0$，于是方程7.19化为：

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{f}{A_{11}} := u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{7.34}$$

三类典型二阶偏微分方程的主要特性

以两个自变量为例：

1. 双曲型：弦振动方程，描述波的传播现象。特性：对时间可逆，不衰减，最大值原理不成立。
2. 抛物型：热传导方程，反映热的传导、物质的扩散等不可逆现象。特性：随时间衰减，瞬间光滑化，最大值原理成立。
3. 椭圆型：调和方程，表示平衡或定常状态。特性：最大值原理成立，不会剧变。

例 7.4: *设 $D \subset \mathbb{R}^2$，讨论空气动力学的 Tricomi 方程 $yu_{xx} + u_{yy} = 0$.*

解: 判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$，于是在上半平面是椭圆型，在下半平面式双曲型，在 x 轴上是抛物型。

在上半平面的特征方程：

$$y(\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}x)^2 = 0 \tag{7.35}$$

得到复解：

$$x + \mathrm{i}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = h_1 \tag{7.36a}$$

$$x - \mathrm{i}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = h_2 \tag{7.36b}$$

取 $\xi = x, \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$，则标准型为：

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0 \tag{7.37}$$

例 7.5: *把方程 $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ 分类并化为标准型并求通解。*

解: $\Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$，则是抛物型的。特征方程：

$$x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0 \implies \frac{y}{x} = h \tag{7.38}$$

作变换：$\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$，则化简后得到：$u_{\eta\eta} = 0$，积分两次得到：

$$u = \eta F(\xi) + G(\xi) = yF\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.39}$$

例 7.6: *求解：*

$$\begin{cases} 4y^2u_{xx} + 2\left(1-y^2\right)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{7.40}$$

解: $a_{11} = 4y^2, a_{12} = 1 - y^2, a_{22} = -1, \Delta = \left(1 + y^2\right)^2 > 0$，于是是双曲型方程。特征方程为：

$$4y^2(\mathrm{d}y)^2 - 2\left(1 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - (\mathrm{d}x)^2 = 0 \tag{7.41}$$

特征方向：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y^2} \tag{7.42}$$

特征线：

$$x + 2y = h_1,\ x - \frac{2y^3}{3} = h_2 \tag{7.43}$$

令 $\xi = x + 2y, \eta = x - \frac{2y^3}{3}$，方程化为：$u_{\xi\eta} = 0$，两次积分，通解为：

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + 2y) + G\left(x - \frac{2y^3}{3}\right) \tag{7.44}$$

代入初值条件得：

$$u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2y^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\int_{x-\frac{2y^3}{3}}^{x+2y} \psi(t)\mathrm{d}t \tag{7.45}$$

7.4 传输方程

考虑**传输方程**初值问题 (一阶线性 PDE)：

$$\begin{cases} w_t + bw_x = f(x, t) \\ w\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{7.46}$$

采用特征线法求解，令 $z(s) = w(x + bs, t + s)$，则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}z(s) = b\frac{\partial w}{\partial(x + bs)}\frac{\mathrm{d}(x + bs)}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial(t + s)}\frac{\mathrm{d}(t + s)}{\mathrm{d}s} = f(x + bs, t + s) \tag{7.47}$$

那么：

$$\begin{aligned} u(x, t) - \varphi(x - t) =& u(x, t) - u(x - t, 0) \\ &= \int_{-t}^{0} \mathrm{d}z(s) = \int_{-t}^{0} f(x + bs, t + s)\mathrm{d}s = \int_{0}^{t} f(x + a(s - t), s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{7.48}$$

于是就得到传输方程7.46的解：

$$u(x, t) = \varphi(x - bt) + \int_0^t f\left(x + b(s - t), s\right)\mathrm{d}s \tag{7.49}$$

7.5 一维齐次波动方程与 d'Alembert 公式

在双曲型方程中，最简单的是一维波动方程。考虑**一维齐次波动方程**：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7.50}$$

其中 $c > 0$ 为波速。

7.5.1 波动算子分解法

思想：对算子进行因式分解，逐步降次，两次化为传输方程进行求解。

令 $v = (\partial_t - c\partial_x)\, u$，那么由7.50知：

$$\begin{cases} (\partial_t + c\partial_x)\, v = 0 \\ v\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - cu_x\big|_{t=0} = \psi(x) - c\varphi'(x) \end{cases} \tag{7.51}$$

注意到这是一个传输方程，利用传输方程的解7.49知：

$$v(x,t) = \psi(x-ct) - c\varphi'(x-ct) \tag{7.52}$$

于是，方程7.50化为：

$$\begin{cases} (\partial_t - c\partial_x)\, u = v \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{7.53}$$

再次利用传输方程的解7.49知：

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \varphi(x+ct) + \int_0^t \left(\psi(x-2cs+ct) - c\varphi'\left(x-2cs+ct\right)\right) \mathrm{d}s \\ =& \varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \left(\psi(s) - c\varphi'(s)\right) \mathrm{d}s \\ =& \frac{\varphi(x+ct)-\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{7.54}$$

也即一维齐次波动方程7.50的 **d'Alembert 公式**。

注记 7.5.1: 波动算子分解法也可以用于求一维非齐次波动方程的解，由于其求解过程是逐次降次的。

7.5.2 行波法/换元法/特征线法

思想：利用双曲型方程的标准型求解。

定义 7.5.1: 对于波动方程，定义波动算子：

$$\Box := \partial_t^2 - c^2\mathcal{D}_{\mathbf{x}}^2 = (\partial_t + c\mathcal{D}_{\mathbf{x}})\,(\partial_t - c\mathcal{D}_{\mathbf{x}}) \tag{7.55}$$

令 $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ 为特征线，则 $x = \frac{\xi+\eta}{2}, t = \frac{\eta-\xi}{2c}$，那么：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{2c}\left(\partial_t - c\partial_x\right) \\ \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2c}\left(\partial_t + c\partial_x\right) \end{cases} \implies \Box u = -4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{7.56}$$

直接积分两次，得到：

$$u(x,t) = f(\eta) + g(\xi) = \underbrace{f(x+ct)}_{\text{左行波}} + \underbrace{g(x-ct)}_{\text{右行波}} \tag{7.57}$$

其中第一项称作**左行波**，第二项称作**右行波**，代回方程7.50得：

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x) \\ cf'(x)-cg'(x)=\psi(x) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x) \\ f(x)-g(x)=\frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s+A \end{cases} \tag{7.58}$$

解得：

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s+\frac{A}{2} \\ g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s-\frac{A}{2} \end{cases} \tag{7.59}$$

于是一维波动方程7.50的解为：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s \tag{7.60}$$

也即 d'Alembert 公式7.54。

例 7.7: Strauss 2.1.8 利用换元法求解三维球形波方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right) \\ u\big|_{t=0}=\varphi(r),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(r) \end{cases} \tag{7.61}$$

其中 $\varphi(r),\psi(r)$ 均为连续可微的偶函数。

解: 换元 $v=ru$，则 $u=\frac{v}{r}$，那么：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{2v}{r^3} \\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \tag{7.62}$$

$$u_{tt}=\frac{1}{r}v_{tt} \tag{7.63}$$

$$\iff c^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)=c^2\left(-\frac{2}{r^2}v_r+\frac{1}{r}v_{rr}+\frac{2v}{r^3}+\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2v}{r^3}\right)=c^2v_{rr} \tag{7.64}$$

$$\iff v_{tt}=c^2v_{rr} \tag{7.65}$$

由 d'Alembert 公式知：

$$v(r,t)=f(r+ct)+g(r-ct) \iff u(r,t)=\frac{f(r+ct)+g(r-ct)}{r} \tag{7.66}$$

于是，代入初值条件得：

$$\begin{cases} \frac{f(r)+g(r)}{r}=\varphi(r) \\ \frac{cf'(r)-cg'(r)}{r}=\psi(r) \end{cases} \iff \begin{cases} f(r)+g(r)=r\varphi(r) \\ f(r)-g(r)=\frac{1}{c}\int_0^r s\psi(s)\mathrm{d}s+A \end{cases} \tag{7.67}$$

$$\implies \begin{cases} f(r)=\frac{r}{2}\varphi(r)+\frac{1}{2c}\int_0^r s\psi(s)\mathrm{d}s+\frac{A}{2} \\ g(r)=\frac{r}{2}\varphi(r)-\frac{1}{2c}\int_0^r s\psi(s)\mathrm{d}s-\frac{A}{2} \end{cases} \tag{7.68}$$

因此，原球形波方程初值问题的解为：

$$u(r,t)=\frac{r+ct}{2}\varphi(r+ct)+\frac{r-ct}{2}\varphi(r-ct)+\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}s\psi(s)\mathrm{d}s \tag{7.69}$$

7.5.3 解的适定性

定理 7.5.1: 能量守恒

为了证明一维波动方程7.50的解的唯一性，引入7.50的能量：

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\underbrace{u_t^2}_{\text{动能}}+\underbrace{c^2u_x^2}_{\text{势能}})\mathrm{d}x \tag{7.70}$$

在方程7.50中，令 $\varphi(x),\psi(x)\in C^2(\mathbb{R})$，且具有紧支集，则由条件以及 d'Alembert 公式知 $E(t)$ 关于 t 一致收敛。由方程7.50知：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=&\int_{\mathbb{R}}\left(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{xt}\right)\\=&c^2\int_{\mathbb{R}}\left(u_tu_{xx}+u_xu_{xt}\right)\mathrm{d}x\\=&c^2\left(u_tu_x\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{\mathbb{R}}\left(-u_{tx}u_x+u_xu_{xt}\right)\mathrm{d}x\right)\\=&0\end{aligned} \tag{7.71}$$

于是能量守恒。

注记 7.5.2: 当 $t\to+\infty$ 时，动能项和势能项趋于相等。

推论 7.5.1: 一维波动方程7.50的解唯一。

证明: 假设一维波动方程7.50有两个解 u_1,u_2，那么 $w=u_1-u_2$ 满足波动方程：

$$\begin{cases}w_{tt}=c^2w_{xx}\\ w\big|_{t=0}=w_t\big|_{t=0}=0\end{cases} \tag{7.72}$$

由能量守恒，知 $E(t)=E(0)=0$. 由于 φ,ψ 性质良好，于是 $w_x=0,w_t=0$，则 $w\equiv0$，则 $u_1\equiv u_2$. □

推论 7.5.2: 适定性

设 $\varphi,\psi\in C^2(\mathbb{R})$ 且均有界，那么对于任意给定的 $T>0$，初值问题7.50的解在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上是稳定的，从而初值问题的解是适定的。

证明: 令 u_i 为对应初值 φ_i,ψ_i 的解，$i=1,2$，令 $w=u_1-u_2$. 若 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|\varphi_1-\varphi_2|<\delta,\sup\limits_{\mathbb{R}}|\psi_1-\psi_2|<\delta$，则由 d'Alembert 公式知：

$$\begin{aligned}|w(x,t)|\leqslant&\frac{1}{2}\left(|\varphi_1(x+ct)-\varphi_2(x+ct)|+|\varphi_1(x-ct)-\varphi_2(x-ct)|\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|\psi_1(s)-\psi_2(s)|\,\mathrm{d}s\\\leqslant&\delta+\frac{1}{2c}2ct\delta\\\leqslant&(1+T)\delta\end{aligned} \tag{7.73}$$

此时，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{1+T}\right)$，则 $\sup\limits_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_1-u_2|<\varepsilon$，因此解在任意有限区间上稳定，则解是适定的。 □

7.5.4 依赖区间、决定区域、影响区域

根据 d'Alembert 公式，讨论解的一些性质。

定义 7.5.2: $u(x_0,t_0)$ 完全由 φ,ψ 在区间 $I_0=[x_0-ct_0,x_0+ct_0]$ 上的值唯一决定，与其他点的初值无关，称 I_0 为 $P(x_0,t_0$ 的依赖区间。

定义 7.5.3: x 轴上的区间 $[a,b]$ 及过点 a,b 的两条特征线 $x-ct=a, x+ct=b$ 围成的三角形区域 K 称作区间 $[a,b]$ 的决定区域，因为 u 在 K 上的取值完全决定于 $[a,b]$ 上的初值。

定义 7.5.4: x 轴上的区间 $[a,b]$ 及过 a,b 的两条特征线 $x+ct=a, x-ct=b$ 围成的无界梯形区域 G 称为区间 $[a,b]$ 的影响区域，因为 u 在 G 上的取值总被 $[a,b]$ 上的初值影响 (在 d'Alembert 公式中被涉及)。

7.6 一维热方程

7.6.1 齐次方程解的最大值原理

在抛物型方程中，考虑一维齐次热方程：

$$u_t=ku_{xx},\quad 0<x<l,t>0 \tag{7.74}$$

令区域 $Q_T=(0,l)\times(0,T]$ (不包含 $x=0,l$ 以及 $t=0$)，并令：

$$\Gamma_T=\overline{Q_T}\backslash Q_T=(\{0,l\}\times[0,T])\,(\cup[0,l]\times\{0\}) \tag{7.75}$$

定理 7.6.1: 下解的最大值原理

热方程7.74的任一解满足：$\max\limits_{\overline{Q_T}}u=\max\limits_{\Gamma_T}u$，也即最大值必在 Γ_T 取到。

对于满足方程 $u_t\leqslant ku_{xx}$ 的下解，上述命题也成立。

证明: 反设 $\max\limits_{\overline{Q_T}}u>\max\limits_{\Gamma_T}u$，也即最大值不能在边界 Γ_T 取到，令 $v(x,t)=u(x,t)+\varepsilon x^2$，那么当 $\varepsilon>0$ 足够小，使得 $\max\limits_{\overline{Q_T}}v>\max\limits_{\Gamma_T}v$ 时，令 (x_0,t_0) 为 $v(x,t)$ 的最大值点，则 $(x_0,t_0)\in Q_T$，且必有：$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0)\leqslant 0.$

因为 $t_0\in(0,T]$，所以 $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)\geqslant 0.$ 那么：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0)=\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)\geqslant k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0)+2\varepsilon kx_0>k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \tag{7.76}$$

于是不满足热方程7.74，也不满足下解的不等式，因此假设不成立。 □

推论 7.6.1: 热方程7.74解的最值点

1. 热方程的任一解的最大值和最小值都必然在 Γ_T 上取到。
2. 热方程的下解的最大值必然在 Γ_T 上取到。
3. 热方程的上解的最小值必然在 Γ_T 上取到。

定理 7.6.2: 强最大值原理

设 $u\in C^{2,1}(Q_T)\cup C(\overline{Q_T})$ 是热方程7.74的下解，那么 u 必然在 Γ_T 上取到最大值；且 u 在 Q_T 上取到最大值当且仅当 u 为常值解。

定理 7.6.3: 比较原理

热方程7.74不同的解在 Γ_T 上的相对大小关系决定了在 $\overline{Q_T}$ 上的相对大小关系。

1. 设 u_1, u_2 都是热方程7.74的属于 $C^{2,1}$ 的解，若在 $u_1 \leqslant u_2$ in Γ_T，那么 $u_1 \leqslant u_2$ in $\overline{Q_T}$.
2. 设 u, v 都是热方程7.74的属于 $C^{2,1}$ 的解，若 $v \geqslant 0$ in $\overline{Q_T}$，且 $|u| \leqslant v$ in Γ_T，则 $|u| \leqslant v$ in $\overline{Q_T}$.

证明: 命题 1 的证明：考虑 $w = u_1 - u_2$，于是 w 是热方程7.74的解，由最大值原理，$w \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} \leqslant 0$，于是 $u_1 \leqslant u_2$. □

命题 2 的证明：分别证明 $u \leqslant v$ 和 $u \geqslant -v$ 即可。 □

7.6.2 初边值问题

考虑非齐次热方程**初边值问题 (混合问题)**:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u\big|_{x=0} = g(t),\ u\big|_{x=l} = h(t) \end{cases} \tag{7.77}$$

命题 7.6.1: 初边值问题解的唯一性

初边值问题7.77的解是唯一的。

证明: 方法一：齐次方程零解。

若方程7.77有两个解 u_1, u_2，令 $w = u_1 - u_2$，那么 w 满足对应的齐次方程:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{7.78}$$

由最大值原理，知：$\max\limits_{\overline{Q_T}} |w| = \max\limits_{\Gamma_T} |w| = 0$，于是 $w \equiv 0$，$u_1 = u_2$. 解唯一。 □

证明: 方法二：能量法。

同理考虑上述平凡边界条件的齐次方程的解 w. 令 $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l w^2(x,t)\mathrm{d}x$，则:

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \int_0^l ww_t \mathrm{d}t = \int_0^l wkw_{xx}\mathrm{d}x = kww_x\Big|_0^l - k\int_0^l w_x^2\mathrm{d}x = -k\int_0^l w_x^2\mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{7.79}$$

因此 $E(t) \leqslant E(0) = 0$，于是 $w \equiv 0$，解唯一。 □

推论 7.6.2: 边界条件为 $g = h = 0$ 时，解的能量是 $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2\mathrm{d}x$，单调递减。

推论 7.6.3: 稳定性

初边值问题7.77在 L^∞ 范数或 L^2 范数下是稳定的，因此在 L^p 中都是稳定的。

证明: 由于线性性，不妨设 $g = h = 0$. 对于 $t = 0$ 时的初值 φ_1, φ_2，设解为 u_1, u_2，令 $w = u_1 - u_2$，于是:

$$\|w\|_\infty = \max_{0\leqslant x\leqslant l} |w| \leqslant \max_{\Gamma_T} |w| = \max_{0\leqslant x\leqslant l} |\varphi_1 - \varphi_2| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \tag{7.80}$$

因此在 L^∞ 中稳定。

因为对于 $w(t)$，由于 $g=h=0$，能量递减，知：

$$\frac{1}{2}\|w\|_2^2 = E(t) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^l (\varphi_1(x)-\varphi_2(x))^2\,\mathrm{d}x = \|\varphi_1-\varphi_2\|_2^2 \tag{7.81}$$

因此在 L^2 中稳定。 □

7.6.3 初值问题

考虑非齐次热方程**初值问题**：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{7.82}$$

定理 7.6.4: 初值问题解的唯一性

若初值问题7.82的解 u 有界，则唯一。

证明: 由于线性性，只需证明 $\varphi=f=0$ 时有且仅有零解。考虑闭矩形 $R=\{(x,t)||x-x_0|\leqslant L, 0\leqslant t\leqslant t_0\}$，令 $M=\sup\limits_R|u|$，构造辅助函数：

$$v(x,t) = \frac{2Mk}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2k}+t\right) \tag{7.83}$$

我们只需证明 $|u|\leqslant v$. 若成立,则 $|u(x_0,t_0)|\leqslant v(x_0,t_0)=\frac{4Mt_0}{L^2}$,令 $L\to+\infty$,即得 $u(x_0,t_0)=0$. 也即证明 $-v\leqslant u\leqslant v$，我们下面只证明 $u\leqslant v$.

易见，v 是对应的齐次方程的第一式的解。令 $w=u-v$，则 $w_t=kw_{xx}$. 而：

$$w\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - v\big|_{t=0} \leqslant 0 \tag{7.84a}$$

$$w\big|_{|x-x_0|=L} = u\big|_{|x-x_0|=L} - v\big|_{|x-x_0|=L} \leqslant M-2M<0 \tag{7.84b}$$

于是 $w\leqslant 0$，成立。 □

注记 7.6.1: (参考 Evans PDE、陈祖墀 PDE)

实际上，当 u 被 $\alpha e^{\beta x^2}, \alpha,\beta>0$ 控制时，解唯一。

当 u 不满足上述控制条件时，解一定不唯一。$\varphi=f=0$ 时齐次方程7.82有 Tychonov 解 (级数解)。

取 $g(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$，令 $g(0)=0$. 考虑形式解：

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}g\left(kt\right) \tag{7.85}$$

当其在 $\mathbb{R}$ 上收敛且 $g\neq 0$ 时，即为方程：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{7.86}$$

在 $\mathbb{R}$ 上的非零解。

7.6.4 齐次初值问题的解及热核

命题 7.6.2: 齐次热方程7.74的解具有以下不变性：

1. 当 $u(x,t)$ 是解时，对于每一个固定的 $y \in \mathbb{R}$，平移后的 $u(x-y,t)$ 依然是方程7.74的解。
2. 当 $u(x,t)$ 是解时，它的任意阶任意混合形式的导数都是方程7.74的解 (当存在时)。
3. 当 $u(x,t)$ 是解时，它的任意阶任意混合形式的积分都是方程7.74的解 (当存在时)。
4. 方程7.74的一族解的线性组合依然是解。
5. 当 $u(x,t)$ 是解时，对于任何具有良好性质的 $g(y)$，$\int_{\mathbb{R}} u(x-y,t)g(y)\mathrm{d}y$ 依然是方程7.74的解 (当收敛时)。
6. 当 $u(x,t)$ 是解时，对于每一个固定的 $a \in \mathbb{R}$，拉伸后的 $u\left(ax, a^2 t\right)$ 依然是方程7.74的解。

考虑一维齐次热方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{7.87}$$

定义 7.6.1: Dirac δ 函数

1. 物理意义：$\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$；$\delta(0) = +\infty$；$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\mathrm{d}x = 1.$
2. 数学意义 (线性泛函)：$\forall u(x) \in C(\mathbb{R})$，称满足线性泛函 $\langle \delta, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)v(x)\mathrm{d}x = v(0)$ 的广义函数 δ 为 Dirac δ 函数。δ 函数是 $H(x) = \chi_{[0,+\infty)}$ 的广义导数。

性质：$\forall \mu \neq 0, \mu\delta(\mu x) = \delta(x)$. (拉伸不变性)

定义 7.6.2: 基本解

方程7.87的基本解为满足关于 $S(x,y,t)$ 的齐次热方程初值问题：

$$\begin{cases} S_t = k S_{xx} \\ \lim\limits_{t\to 0} S(x,y,t) = \delta(x-y) \end{cases} \tag{7.88}$$

的解 $S(x,y,t)$. 其中 $y \in \mathbb{R}$ 为参数，$\delta(\cdot)$ 为 Dirac δ 函数。

我们不难注意到：对于上述方程的任意一个解 $S(x,y,t)$，均有：$\forall x,y,t,h \in \mathbb{R}, S(x,y,t) \equiv S(x+h,y+h,t)$，所以我们只需要考虑 $S(x-y,0,t)$. 令 $K(x,t) = S(x,0,t)$，则转化为下面的问题。

定理 7.6.5: 相似性

令 $K(x,t)$ 为一维齐次热方程初值问题：

$$\begin{cases} K_t = k K_{xx} \\ \lim\limits_{t\to 0} K(x,t) = \delta(x) \end{cases} \tag{7.89}$$

的唯一解 (存在唯一性的证明请参考 A. Friedman PDEs of Parabolic Type)，则有：

$$\lambda K\left(\lambda x, \lambda^2 t\right) = K(x,t) = K\left(|x|, t\right), \forall \lambda > 0 \tag{7.90}$$

证明: 令 $\tilde{K}(x,t) = \lambda K\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)$，有：

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{K}(x,t)}{\partial t} = \lambda^3 \frac{\partial K\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \tilde{K}(x,t)}{\partial x^2} = \lambda^3 \frac{\partial K\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)}{\partial x^2} \end{cases} \implies \frac{\partial \tilde{K}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial x^2} \tag{7.91}$$

也即 $\tilde{K}(x,t)=\lambda K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)$ 也满足上述方程的第一式；而由 δ 函数的拉伸不变性以及 $\lambda>0$：

$$\lim_{t\to 0}\tilde{K}(x,t)=\lambda\lim_{t\to 0}K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)=\lambda\delta(\lambda x)=\delta(x) \tag{7.92}$$

由解的唯一性，$K(x,t)\equiv\tilde{K}(x,t)=\lambda K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)$. 第一个等号成立。

令 $\hat{K}(x,t)=K(-x,t)$，同样地，我们可以验证：

$$\begin{cases}\frac{\partial\hat{K}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial K(-x,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial^2\hat{K}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K(-x,t)}{\partial x^2}\end{cases}\implies\frac{\partial\hat{K}}{\partial t}=k\frac{\partial^2\hat{K}}{\partial x^2} \tag{7.93}$$

又因为 $\lim\limits_{t\to 0}\hat{K}(x,t)=\delta(-x)=\delta(x)$，于是 $\hat{K}(x,t)$ 也满足上述方程。由解的唯一性，$\hat{K}\equiv K$. 第二个等号成立。 □

定义 7.6.3: 热核/Gauss Kernel

一维齐次热方程初值问题

$$\begin{cases}K_t=kK_{xx}\\ \lim\limits_{t\to 0}K(x,t)=\delta(x)\end{cases} \tag{7.94}$$

的解为：

$$K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \tag{7.95}$$

称作热核或 **Gauss Kernel**.

证明: 根据上面已证的相似性：$\forall\lambda>0$, $K(x,t)=\lambda K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)=K(|x|,t)$，为了消去 t，令 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{t}}$，则 $K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}K\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right)$. 于是：

$$\begin{aligned}0=&\frac{\partial}{\partial\lambda}K(x,t)\Big|_{\lambda=t=1}\\=&\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)\right)\Big|_{\lambda=t=1}\\=&\left(K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)+\lambda^2 x\frac{\partial K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)}{\partial x}+2\lambda^2 t\frac{\partial K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)}{\partial t}\right)\Big|_{\lambda=t=1}\\=&\left(K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)+\lambda^2 x\frac{\partial K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)}{\partial x}+2\lambda^2 kt\frac{\partial^2 K\left(\lambda x,\lambda^2 t\right)}{\partial x^2}\right)\Big|_{\lambda=t=1}\\=&K(x,1)+x\frac{\partial K(x,1)}{\partial x}+2k\frac{\partial^2 K(x,1)}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{7.96}$$

令 $w(x)=K(x,1)$，于是 $w(x)\in C^2$ 满足 ODE:

$$2kw''+xw'+w=0 \tag{7.97}$$

通解为：

$$w(x)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k}}\int_0^x\mathrm{e}^{\frac{s^2}{4k}}\mathrm{d}s \tag{7.98}$$

下面我们来确定常数 C_1,C_2.

注意到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}K\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}K_t\mathrm{d}x=k\int_{\mathbb{R}}K_{xx}\mathrm{d}x=k\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}K_x=kK_x\Big|_{x=\infty}^{x=+\infty} \tag{7.99}$$

由于 $K(x,t)$ 是偶函数 (上面已证)，所以上式为 0，$\int_{\mathbb{R}} K(x,t)\mathrm{d}x$ 与 t 无关。于是：

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,t)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} K(x,0^+)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{7.100}$$

取 $t=1$，那么：

$$1 = \int_{\mathbb{R}} w(x)\mathrm{d}x = C_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k}}\mathrm{d}x + C_2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{s^2}{4k}}\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{7.101}$$

因为含常数 C_2 的反常积分发散到 $+\infty$，所以 $C_2=0$，于是：

$$1 = C_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k}}\mathrm{d}x = \sqrt{4k\pi}C_1 \tag{7.102}$$

那么 $C_1 = \frac{1}{\sqrt{4k\pi}}$. 于是：

$$K(x,1) = w(x) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k}} \tag{7.103}$$

$$\Longrightarrow\ K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}K\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \tag{7.104}$$

易见 $K(x,t)$ 在 $t=0$ 处奇异，在 $t\neq 0$ 处光滑。且：

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \tag{7.105}$$

其中 $\mathrm{erf}(\cdot)$ 为误差函数 $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$.

推论 7.6.4: $\mathbb{R}^n$ 中的热核/Gauss Kernel 为：

$$K(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4k\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4kt}\right) \tag{7.106}$$

基本解为：$S(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = K(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)$，其中 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 是参数。

推论 7.6.5: 一维齐次热方程初值问题7.87的基本解为：

$$S(x,y,t) = K(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) \tag{7.107}$$

其中 $y\in\mathbb{R}$ 是参数。

推论 7.6.6: $\mathbb{R}^n$ 上的齐次热方程的基本解为：

$$S(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = K(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4kt}\right) \tag{7.108}$$

定理 7.6.6: 一维齐次热方程初值问题7.87的解

当 φ 有界时 (实际上，只需被 $\alpha\mathrm{e}^{\beta x^2}$ 控制即可)，一维齐次热方程初值问题7.87的解为基本解与初值的卷积 (对参数 y 进行卷积)：

$$\begin{aligned} u(x,t) = (S*\varphi)(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-p^2}\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-p^2}\left(\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)+\varphi\left(x+\sqrt{4kt}p\right)\right)\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{7.109}$$

注记 7.6.2: 因为热方程7.74的任何解与性质良好的函数的卷积仍然是解，所以我们只需要保证卷积结果满足初值即可，于是利用 Dirac δ 函数。

证明: 直接代入上式进行验证：

$$u_t - ku_{xx} = \int_{\mathbb{R}} (S_t(x,y,t) - kS_{xx}(x,y,t))\,\varphi(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{7.110}$$

$$u(x,0) = \lim_{t\to 0} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0} S(x,y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \varphi(x) \tag{7.111}$$

因此，$(S*\varphi)(x,t)$ 是方程7.87的解。 □

命题 7.6.3: 热核的性质

对于常数 $t_1, t_2 > 0$，有：

$$\int_{\mathbb{R}} K(x-y,t_1)K(y,t_2)\mathrm{d}y = K(x,t_1+t_2) \tag{7.112}$$

定义算子：

$$\mathcal{L}_x^t[\varphi] := \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y,\ t>0 \tag{7.113}$$

那么 $\forall t_1, t_2 > 0$, $\mathcal{L}_x^{t_1}\mathcal{L}_x^{t_2} = \mathcal{L}_x^{t_2}\mathcal{L}_x^{t_1} = \mathcal{L}_x^{t_1+t_2}$.

证明:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} K(x-y,t_1)K(y,t_2)\mathrm{d}y = K(x,t_1+t_2)\\
=&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4k\pi t_1}}\frac{1}{\sqrt{4k\pi t_2}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt_1} - \frac{y^2}{4kt_2}\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4k\pi\sqrt{t_1t_2}} \exp\left(-\frac{(t_1+t_2)y^2 - 2t_2xy + t_2x^2}{4kt_1t_2}\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4k\pi\sqrt{t_1t_2}} \exp\left(-\frac{(t_1+t_2)\left(y - \frac{t_2x}{\sqrt{t_1+t_2}} + \frac{t_1t_2}{t_1+t_2}x^2\right)}{4kt_1t_2}\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4k\pi\sqrt{t_1t_2}} \exp\left(-\frac{t_1t_2}{4kt_1t_2}y^2 - \frac{x^2}{4k(t_1+t_2)}\right)\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{\sqrt{4k\pi(t_1+t_2)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k(t_1+t_2)}\right)\\
=&K(x,t_1+t_2)
\end{aligned} \tag{7.114}$$

例 7.8: 可分离变量的情形

若 $u_1(x,t), u_2(x,t)$ 分别是问题：

$$\begin{cases} u_{1,t} = ku_{1,xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases};\ \begin{cases} u_{2,t} = ku_{2,xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u_2\big|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases} \tag{7.115}$$

的解，那么函数 $u(x,y,t) = u_1(x,t)u_2(y,t)$ 是 2 维问题：

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi_1(x)\varphi_2(y) \end{cases} \tag{7.116}$$

的解。(代入，显然)

因此，2 维热方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(y) \end{cases} \tag{7.117}$$

的解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\alpha_n(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\beta_n(y)\mathrm{d}y \tag{7.118}$$

7.7 波与扩散的比较

	波	扩散
速度	$c>0$ 有限	无限
$t\to 0$ 时的奇异性 (如果有)	沿特征线传播	瞬间消失
$t>0$ 时解的适定性	Yes	Yes
$t<0$ 时解的适定性	Yes	No(不可逆过程)
$t\to+\infty$ 的衰减性	非衰减	严格衰减

注记 7.7.1: 热方程的瞬间光滑性使得它的解对时间不可逆，反热方程的解往往很快就变为不适定的。

注记 7.7.2: 对于非线性扩散方程，如 $u_t = u_{xx} + u(1-u)$(KPP 方程/Fisher 方程)，其不衰减，有行波解 $u(x,t) = U(x-ct)$，满足 $U(-\infty)=1, U(+\infty)=0$，而 c 也不唯一，$c \geqslant c^* = \sqrt{2}$.

定理 7.7.1: 波动和传热的关系

考虑函数：

$$v(x,t) = \frac{c}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{s^2c^2}{4kt}}u(x,s)\mathrm{d}s \tag{7.119}$$

其中 $u(x,t)$ 满足波动方程 $u_{tt} = c^2u_{xx}$，u 的二阶导数有界。求证：$v(x,t)$ 满足热方程 $v_t = kv_{xx}$，且 $v\left(x,0^+\right) = u\left(x,0^+\right)$.

证明:

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)u(x,s)\mathrm{d}s \tag{7.120}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v(x,t) =& \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)u(x,s)\mathrm{d}s \\ =&\frac{k}{c^2}\int_{\mathbb{R}} u(x,s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)\mathrm{d}s \\ =&\frac{k}{c^2}u(x,s)\frac{\partial}{\partial x}K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)\Bigg|_{s=-\infty}^{s=+\infty} - \frac{k}{c^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,s)\mathrm{d}s \\ =&-\frac{k}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}u(x,s)K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)\Bigg|_{s=-\infty}^{s=+\infty} + \frac{k}{c^2}\int_{\mathbb{R}}K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,s)\mathrm{d}s \\ =&k\int_{\mathbb{R}}K_{\frac{k}{c^2}}(s,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,s)\mathrm{d}s \\ =&k\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) \end{aligned} \tag{7.121}$$

且：

$$
\begin{aligned}
v\left(x,0^{+}\right) &= \int_{\mathbb{R}} K_{\frac{k}{c^2}}(s,0^{+})u(x,s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-p^2} \lim_{t\to 0^{+}} u\left(x, \frac{\sqrt{4kt}}{c}p\right)\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-p^2} u(x,0^{+})\mathrm{d}p \\
&= u\left(x,0^{+}\right)
\end{aligned}
\tag{7.122}
$$

第八章　反射与源 (半直线问题、非齐次问题)

8.1　反射 (半直线问题)

思想：对半直线问题的初值条件，根据边界条件进行合适的延拓，使得延拓后的在全轴上的初值问题 (不含边界条件) 的解和初值均**符合原来的边界条件**。那么由解的唯一性，半直线上的混合问题的解，就是延拓后的问题的解在半直线上的部分。

注记 8.1.1: 我们仅考虑经典解，也即属于 $C^{2,1}$ 的解。

注记 8.1.2: 若相容条件成立，则解为经典解；否则，则解为非经典解。

第一类边界条件/Dirichlet 条件

例 8.1: 波动方程

考虑反射波初边值问题 (第一类边界条件/Dirichlet 条件)：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \\ u\big|_{x=0} = 0,\ \varphi(0) = \psi(0) = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

其中相容条件为 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

解: 对 u, φ, ψ 关于 x 作**奇延拓**，变为：$U(x,t), \Phi(x), \Psi(x)$. 则满足方程：

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U\big|_{t=0} = \Phi(x),\ U_t\big|_{t=0} = \Psi(x) \end{cases} \tag{8.2}$$

由 d'Alembert 公式得，当 $x \geqslant 0$ 时：

$$u(x,t) = U(x,t)\Big|_{x\geqslant 0} = \begin{cases} \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\mathrm{d}s, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{x}{c} \\ \frac{\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s)\mathrm{d}s, & t \geqslant \frac{x}{c} \end{cases} \tag{8.3}$$

例 8.2: 热方程

考虑半直线热方程初边值问题 (第一类边界条件/Dirichlet 条件)：

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x > 0 \\ u\big|_{x=0} = 0,\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

其中相容条件为 $\varphi(0)=0$.

解: 对 u,φ 关于 x 作**奇延拓**，变为：$U(x,t),\Phi(x,t)$. 则满足方程：

$$\begin{cases} U_t = kU_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ U\big|_{t=0} = \Phi(x) \end{cases} \tag{8.5}$$

由热方程解的公式，当 $x\geqslant 0$ 时：

$$u(x,t)=U(x,t)\Big|_{x\geqslant 0}=\int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\Phi(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(K(x-y,t)-K(x+y,t)\right)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{8.6}$$

注记 8.1.3: 对于初值是关于 x 或 t 的奇函数的全直线热方程问题，其解也是关于 x 或 t 的奇函数。对偶函数也同理。

第二类边界条件/Neumann 条件

例 8.3: 波动方程

考虑反射波初边值问题 (第二类边界条件/Neumann 条件)：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x>0, t>0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x) \\ u_x\big|_{x=0}=0,\ \varphi'(0)=\psi'(0)=0 \end{cases} \tag{8.7}$$

其中相容条件为 $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$.

解: 对 u,φ,ψ 作**偶延拓**，变为：$U(x,t),\Phi(x),\Psi(x)$，则满足方程：

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ U\big|_{t=0}=\Phi(x),\ U_t\big|_{t=0}=\Psi(x) \end{cases} \tag{8.8}$$

由 d'Alembert 公式得，当 $x\geqslant 0$ 时：

$$u(x,t)=U(x,t)\Big|_{x\geqslant 0}=\begin{cases} \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s, & 0\leqslant t\leqslant \frac{x}{c} \\ \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct}+\int_0^{ct-x}\right)\psi(s)\mathrm{d}s, & t\geqslant \frac{x}{c} \end{cases} \tag{8.9}$$

例 8.4: 热方程

考虑半直线热方程初边值问题 (第二类边界条件/Neumann 条件)：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x>0, t>0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), & x>0 \\ u_x\big|_{x=0}=0,\ \varphi'(0)=0 \end{cases} \tag{8.10}$$

其中相容条件为 $\varphi'(0)=0$.

解: 对 u, φ 作偶延拓，变为：$U(x,t), \Phi(x)$，其中 $\Phi(-x) = \Phi(x)$，则满足方程：

$$\begin{cases} U_t = kU_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U\big|_{t=0} = \Phi(x) \end{cases} \tag{8.11}$$

由热方程解的公式，当 $x \geqslant 0$ 时：

$$u(x,t) = U(x,t)\bigg|_{x \geqslant 0} = \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\Phi(y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(K(x-y,t) + K(x+y,t)\right)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{8.12}$$

第三类边界条件/Robin 条件

例 8.5: 波动方程

考虑反射波初边值问题 (第二类边界条件/Neumann 条件)：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \\ (u_x - hu)\big|_{x=0} = 0,\ \varphi'(0) - h\varphi(0) = \psi'(0) - h\psi(0) = 0 \end{cases} \tag{8.13}$$

其中相容条件为 $\varphi'(0) - h\varphi(0) = \psi'(0) - h\psi(0) = 0$.

解: 令 $v = u_x - hu$，那么 v 满足方程组：

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ v\big|_{t=0} = \varphi'(x) - h\varphi(x),\ v_t\big|_{t=0} = \psi'(x) - h\psi(x) \\ v\big|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{8.14}$$

于是这是一个第一类/Dirichlet 边界条件的半直线波动方程，所以我们对 u, φ, ψ 作延拓，使得：

$$\begin{cases} \Phi(x) = \varphi(x) \\ \Psi(x) = \psi(x) \end{cases},\ x > 0 \tag{8.15a}$$

$$\begin{cases} \Phi(x)' - h\Phi(x) = -\varphi'(-x) + h\varphi(-x) \\ \Psi'(x) - h\Psi(x) = -\psi'(-x) + h\psi(-x) \\ \Phi(0) = \varphi(0),\ \Psi(0) = \psi(0) \end{cases},\ x \leqslant 0 \tag{8.15b}$$

解得，当 $x \leqslant 0$ 时：

$$\begin{cases} \Phi(x) = \varphi(-x) + 2h\mathrm{e}^{hx} \int_0^x \mathrm{e}^{-hs}\varphi(-s)\mathrm{d}s \\ \Psi(x) = \psi(-x) + 2h\mathrm{e}^{hx} \int_0^x \mathrm{e}^{-hs}\psi(-s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{8.16}$$

由 d'Alembert 公式，当 $x \geqslant 0$ 时：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(x,t)\bigg|_{x \geqslant 0} \\ &= \begin{cases} \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\mathrm{d}s, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{x}{c} \\ \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(ct-x)}{2} - h\int_0^{ct-x} \mathrm{e}^{h(s+x-ct)}\varphi(s)\mathrm{d}s \\ \quad + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} + \int_0^{ct-x}\right)\psi(s)\mathrm{d}s - \frac{h}{c}\int_0^{ct-x}\int_0^s \mathrm{e}^{h(t-s)}\psi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, & t \geqslant \frac{x}{c} \end{cases} \end{aligned} \tag{8.17}$$

例 8.6: 热方程

考虑半直线热方程初边值问题 (第三类边界条件/Robin 条件):

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x > 0 \\ (u_x - hu)\big|_{x=0} = 0,\ \varphi'(0) - h\varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{8.18}$$

其中相容条件为 $\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$.

解: 令 $v = u_x - hu$，那么 v 满足方程组:

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ v\big|_{t=0} = \varphi'(x) - h\varphi(x) \\ v\big|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{8.19}$$

于是这是一个第一类/Dirichlet 边界条件的半直线热方程，所以我们对 u, v, φ 作延拓，变为 $U(x,t), V(x,t), \Phi(x)$，使得：当 $x > 0$ 时，$\Phi(x) = \varphi(x)$；当 $x \leqslant 0$ 时：

$$\begin{cases} \Phi'(x) - h\Phi(x) = -\varphi'(x) + h\varphi(x) \\ \Phi(0) = \varphi(0) \end{cases} \tag{8.20}$$

解得:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ \varphi(-x) - 2h\int_0^{-x} \varphi(s)\mathrm{e}^{h(s+x)}\mathrm{d}s, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{8.21}$$

由热方程解的公式，当 $x \geqslant 0$ 时:

$$\begin{aligned} & u(x,t) = U(x,t)\Big|_{x\geqslant 0} \\ = & \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\Phi(y)\mathrm{d}y \\ = & \int_0^{+\infty} K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^0 K(x-y,t)\left(\varphi(-y) - 2h\int_0^{-y}\varphi(s)\mathrm{e}^{h(s+y)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y \\ = & \int_0^{+\infty} \left(K(x-y,t) + K(x+y,t)\right)\varphi(y)\mathrm{d}y - 2h\int_0^{+\infty} K(x+y,t)\int_0^y \mathrm{e}^{h(s-y)}\varphi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ = & \int_0^{+\infty} \left(K(x-y,t) + K(x+y,t)\right)\varphi(y)\mathrm{d}y - 2h\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{hs}\varphi(s)\int_s^{+\infty} K(x+y,t)\mathrm{e}^{-hy}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ = & \int_0^{+\infty} \left(K(x-y,t) + K(x+y,t)\right)\varphi(y)\mathrm{d}y - \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{hx+kth^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{hs}\varphi(s)\int_{\frac{x+s}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{kt}h}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p^2}\mathrm{d}p\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{8.22}$$

8.2 源 (非齐次问题)

对于线性常微分方程，我们求解非齐次问题使用的是常数变易法。对于线性偏微分方程，我们使用 **Duhamel 原理/齐次化原理**求解非齐次方程，并利用**叠加原理**进行求解。

定义 8.2.1: Duhamel 原理/冲量原理

设 $\mathcal{L}$ 为关于 t 与 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 的线性偏微分算子，且关于 t 的导数不超过 $m-1$ 阶，则非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \mathcal{L}w + f(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ w\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{8.23}$$

的解为 $w(\mathbf{x},t)=\int_0^t z(\mathbf{x},t;\tau)\mathrm{d}\tau$，其中 $z(\mathbf{x},t;\tau)$ 满足齐次方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m z}{\partial t^m} = \mathcal{L}z, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>\tau>0 \\ z\big|_{t=0} = z_t\big|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-2} z}{\partial t^{m-2}}\big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} = f(x,\tau) \end{cases} \tag{8.24}$$

(实际上是将 t 右移了 τ 的初值问题)

定义 8.2.2: 叠加原理：

1. 有限叠加：若 $\mathcal{L}u_i = f_i$，且 $u=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i$，那么 $\mathcal{L}u=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i$.
2. 级数叠加：若 $\mathcal{L}u_i = f_i$，且 $u=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i$ 一致收敛，那么 $\mathcal{L}u=\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i f_i$.
3. 积分叠加：若 $\mathcal{L}u(M,M_0)=f(M,M_0)$，且 $U=\int u(M,M_0)\mathrm{d}M_0$ 一致收敛，那么 $\mathcal{L}U = \int f(M,M_0)\mathrm{d}M_0$.

例 8.7: 考虑一维非齐次波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{8.25}$$

解: 分为两个问题 (齐次问题和纯受迫问题) 求解并叠加：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{8.26a}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{8.26b}$$

由 d'Alembert 公式，第一个问题的解为：

$$u_1(x,t) = \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s \tag{8.27}$$

由 Duhamel 原理，第二个问题的解为：

$$u_2(x,t) = \int_0^t z(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{8.28}$$

由叠加原理，方程8.25的解为：

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{8.29}$$

推论 8.2.1: 求证：一维非齐次波动方程初值问题8.25的解 $u(x,t)$ 在有限时间内是适定的。

证明: 假设两个不同条件下的解：

$$u_1(x,t)=\frac{\varphi_1(x+ct)+\varphi_1(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_1(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f_1(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{8.30a}$$

$$u_2(x,t)=\frac{\varphi_2(x+ct)+\varphi_2(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_2(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f_2(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{8.30b}$$

那么，当 $t\in[0,T]$ 时：

$$\begin{aligned}
&|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\\
\leqslant&\frac{1}{2}\left(|\varphi_1(x+ct)-\varphi_2(x+ct)|+|\varphi_1(x+ct)-\varphi_2(x-ct)|\right)\\
&+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|\psi_1(s)-\psi_2(s)|\mathrm{d}s+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}|f_1(s,\tau)-f_2(t,\tau)|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\
\leqslant&\max_{\mathbb{R}}|\varphi_1-\varphi_2|+t\max_{\mathbb{R}}|\psi_1-\psi_2|+\frac{t^2}{2}\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|f_1-f_2|
\end{aligned} \tag{8.31}$$

因此，对于有界的 t，解是适定的。 □

例 8.8: 考虑一维非齐次热方程初值问题：

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases} \tag{8.32}$$

解: 分为两个问题 (齐次问题和纯受迫问题) 求解并叠加：

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases} \tag{8.33a}$$

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases} \tag{8.33b}$$

第一个问题的解为：

$$u_1(x,t)=\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{8.34}$$

由 Duhamel 原理，第二个问题的解为：

$$u_2(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \tag{8.35}$$

由叠加原理，方程8.32的解为：

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \tag{8.36}$$

例 8.9: 带源一维波动方程半直线问题 (第一类边界条件)：

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t), & x>0,t>0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x), & x\geqslant 0\\ u\big|_{x=0}=0, & t\geqslant 0\end{cases} \tag{8.37}$$

利用奇延拓方法给出解：

$$u(x,t)=\begin{cases}\begin{array}{c}\frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s\\+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{array}, & 0\leqslant t\leqslant\frac{x}{c}\\ \begin{array}{r}\frac{\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s\\+\frac{1}{2c}\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2c}\int_{t-\frac{x}{c}}^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{array}, & t>\frac{x}{c}\end{cases}\tag{8.38}$$

例 8.10: 修改端点条件：

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t), & x>0,t>0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x), & x\geqslant 0\\ u\big|_{x=0}=g(t), & t\geqslant 0\end{cases}\tag{8.39}$$

令 $v(x,t)=u(x,t)-g(t)$，则 $v(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases}v_{tt}=c^2v_{xx}+f(x,t)-g''(t), & x>0,t>0\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x)-g(0),\ v_t\big|_{t=0}=\psi(x)-g'(0), & x\geqslant 0\\ v\big|_{x=0}=0, & t\geqslant 0\end{cases}\tag{8.40}$$

再做奇延拓，求解得：

$$u(x,t)=\begin{cases}\begin{array}{c}\frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s\\+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{array}, & 0\leqslant t\leqslant\frac{x}{c}\\ \begin{array}{r}\frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s+g\left(t-\frac{x}{c}\right)\\+\frac{1}{2c}\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2c}\int_{t-\frac{x}{c}}^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{array}, & t>\frac{x}{c}\end{cases}\tag{8.41}$$

注记 8.2.1: 注意到：$0\leqslant t\leqslant\frac{x}{c}$ 时，结果不含 g，这是因为解的影响区域不含 $x=0$.

8.3 扩散的光滑性

定理 8.3.1: 光滑性原理

对于一维热方程7.87，设 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，则解 $u(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$.

证明: 令 $\|\varphi\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}}|\varphi|$，利用基本解：

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y=(S*\varphi)(x,t)\tag{8.42}$$

注意到：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}S(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}K(x-y,t)\\=&\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right)\frac{-2(x-y)}{4kt}\\=&-\frac{x-y}{2kt}K(x-y,t)\\=&\mathcal{O}\left(\frac{|x-y|}{t^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4kt}\right)\right)\end{aligned}\tag{8.43}$$

因此,$\forall x\in\mathbb{R}, t>0$,上式作为 y 的函数是具有良好衰减性的,那么 $\int_{\mathbb{R}} S(x,y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛 (实际上，当 $\varphi(x)$ 被 $\alpha \mathrm{e}^{\beta x^2}$ 控制时也成立)。于是:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}S(x,y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{8.44}$$

在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 上存在，且:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right\|_\infty \leqslant \frac{4k\,\|\varphi\|_\infty}{\sqrt{t}} \triangleq \frac{M_1}{\sqrt{t}}\,\|\varphi\|_\infty \tag{8.45}$$

于是:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\,(\cdot,t)\right\|_\infty \leqslant \frac{M_1}{\sqrt{t}}\,\|\varphi\|_\infty \tag{8.46}$$

类似地:

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_\infty \leqslant \frac{M_2}{t}\,\|\varphi\|_\infty\,,\ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\,(\cdot,t)\right\|_\infty \leqslant \frac{M_3}{t}\,\|\varphi\|_\infty \tag{8.47}$$

因此，我们由数学归纳法，易证 $u(x,t)$ 是无限次可微的。 □

定理 8.3.2: 设一维齐次热方程初值问题中的初值函数 $\varphi(x)$ 是分段可微的，那么解 $u(x,t)=(S*\varphi)(x,t)$ 在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 是无穷次可微的，且具有局部性质:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{t\to0^+}u(x,t)=\frac{\varphi\left(x^+\right)+\varphi\left(x^-\right)}{2} \tag{8.48}$$

证明: 因为:

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-p^2}\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)\mathrm{d}p \tag{8.49}$$

所以，由于卷积一致收敛，则可以交换反常积分与极限的顺序，得:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}u(x,t)=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to0^+}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-p^2}\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)\mathrm{d}p\\ =&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-p^2}\left(\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)+\varphi\left(x+\sqrt{4kt}p\right)\right)\mathrm{d}p\\ =&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-p^2}\left(\lim_{t\to0^+}\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)+\lim_{t\to0^+}\varphi\left(x+\sqrt{4kt}p\right)\right)\mathrm{d}p\\ =&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-p^2}\left(\varphi\left(x^-\right)+\varphi\left(x^+\right)\right)\mathrm{d}p\\ =&\frac{\varphi\left(x^+\right)+\varphi\left(x^-\right)}{2}\end{aligned} \tag{8.50}$$

定理 8.3.3: 设一维齐次热方程初值问题中的初值函数 $\varphi(x)$ 是有界的，且 $\varphi(\pm\infty)$ 存在，那么解 $u(x,t)$ 在 $t\to+\infty$ 时具有性质:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{\varphi\left(+\infty\right)+\varphi\left(-\infty\right)}{2} \tag{8.51}$$

证明: 因为解为:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-p^2}\left(\varphi\left(x-\sqrt{4kt}p\right)+\varphi\left(x+\sqrt{4kt}p\right)\right)\mathrm{d}p \tag{8.52}$$

所以一致收敛，积分和极限可以交换，那么:

$$u(x,+\infty)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-p^2}\left(\varphi\left(-\infty\right)+\varphi\left(+\infty\right)\right)\mathrm{d}p=\frac{\varphi\left(+\infty\right)+\varphi\left(-\infty\right)}{2} \tag{8.53}$$

第九章　边值问题 (有界区间问题)

9.1　分离变量法 (Fourier 方法)，Dirichlet 边界条件

思想：将方程在完备正交系上展开，再用级数表示。

9.1.1　Dirichlet 边界条件

考虑有限区间上的一维齐次波动方程的初边值问题 (齐次边值条件)：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \\ u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

考虑经典解，相容条件为：$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(l) = \psi(l) = 0$.

我们考虑驻波解 (分离解) $X(x)T(t) \not\equiv 0$，满足边值条件。那么：

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \iff \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} := -\lambda \tag{9.2}$$

$$\implies \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

我们考虑非零解，根据 Sturm-Liouville 理论，$\lambda \geqslant 0$，根据上式解得 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N}_+$，对应特征函数为：

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{9.4}$$

对于每一个 λ_n，代入得：

$$T_n''(t) + \lambda_n c^2 T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = C_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \tag{9.5}$$

根据叠加原理，方程9.1的**形式解**为：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \tag{9.6}$$

如果上述级数收敛且满足一定的的性质，则为方程的解。我们由初值条件来确定 C_n, D_n 的取值：

$$\begin{cases} \varphi(x) = u\big|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \psi(x) = u_x\big|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} D_n \frac{cn\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \end{cases} \tag{9.7}$$

由此可以看出，求经典解时相容条件是必要的。此时，由 Fourier 级数：

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x \\ D_n = \frac{2}{cn\pi l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x \end{cases} \tag{9.8}$$

于是，方程9.1的形式解即为：

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} \cos \frac{cn\pi t}{l} \mathrm{d}s + \frac{1}{cn\pi} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} \sin \frac{cn\pi t}{l} \mathrm{d}s \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{9.9}$$

命题 9.1.1: 当 $\varphi, \psi \in C^4[0,l]$ 时，方程9.1的形式解成为经典解 (属于 $C^{2,1}$ 的解)。

证明: 当 $\varphi, \psi \in C^4[0,l]$ 时，$C_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, $D_n = o\left(\frac{1}{n^5}\right)$. 于是，形式解 $u(x,t)$ 的形式偏导数的级数求和是绝对收敛的 (由 Weierstrass 判别法)。

考虑有限区间上的一维齐次热方程的初边值问题 (齐次边值条件)：

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{9.10}$$

考虑经典解，相容条件为：$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

我们考虑驻波解 (分离解) $X(x)T(t) \not\equiv 0$，满足边值条件。那么：

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \iff \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} := -\lambda \tag{9.11}$$

$$\implies \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

我们考虑非零解，根据 Sturm-Liouville 理论，$\lambda \geqslant 0$，根据上式解得 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}_+$，对应特征函数为：

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{9.13}$$

对于每一个 λ_n，代入得：

$$T_n'(t) + \lambda_n k T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\lambda_n k t} = C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} kt\right) \tag{9.14}$$

根据叠加原理，方程9.10的**形式解**为：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} kt\right) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \tag{9.15}$$

如果上述级数收敛且满足一定的的性质，则为方程的解。我们由初值条件来确定 C_n, D_n 的取值：

$$\varphi(x) = u\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{9.16}$$

由此可以看出，求经典解时相容条件是必要的。此时，由 Fourier 级数：

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{9.17}$$

于是，方程9.10的形式解即为：

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}s\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}s \tag{9.18}$$

9.1.2 调和方程与 Poisson 公式

例 9.1: 二维圆盘

考虑圆盘上的二维调和方程：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2+y^2<a^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=a^2} = F(x,y) \end{cases} \tag{9.19}$$

进行极坐标变换 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r \geqslant 0, \theta \in \mathbb{R}$:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{9.20}$$

方程写成极坐标形式：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)u = 0, & 0<r<a \\ u\big|_{r=a} = F(a\cos\theta, a\sin\theta) := f(\theta) \end{cases} \tag{9.21}$$

此时需要周期条件：$u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$.

我们考虑分离解 $R(r)\Theta(\theta) \not\equiv 0$，满足边值条件。那么：

$$\begin{aligned} &R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \text{const} = -\lambda \end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta+2\pi) \end{cases} \tag{9.23}$$

根据 Sturm-Liouville 理论，$\lambda \geqslant 0$，且周期条件的解有简并现象。根据上式解得 $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, 对应特征函数为：

$$\begin{cases} \Theta_0(\theta) = 1 \\ \begin{cases} \Theta_{n,1}(\theta) = \cos n\theta \\ \Theta_{n,2}(\theta) = \sin n\theta \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_+ \end{cases} \tag{9.24}$$

而对于 $R(r)$ 有:

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0 \tag{9.25}$$

这是一个 Euler 方程，令 $t=\ln r$ 得:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\end{cases} \tag{9.26}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}-n^2R=0\ \Longrightarrow\ \begin{cases}R_0(t)=C_0+D_0t=C_0+D_0\ln r\\ R_n(t)=C_n\mathrm{e}^{nt}+D_n\mathrm{e}^{-nt}=C_nr^n+D_nr^{-n},\quad n\in\mathbb{N}_+\end{cases} \tag{9.27}$$

我们求经典解，其在圆盘上有界，所以 $D_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$. 又因为 $\Theta(\theta)$ 可以用于待定系数，所以我们直接取 $R_n=r^n, n\in\mathbb{N}$ (不需为 R_n 待定系数). 于是形式解为:

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \tag{9.28}$$

如果上述级数收敛且满足一定的的性质，则为方程的解。我们由边值条件来确定 a_n,b_n 的取值:

$$u\Big|_{r=a}=f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin\theta\right) \tag{9.29}$$

此时，由 Fourier 级数:

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta\end{cases} \tag{9.30}$$

于是，方程的形式解即为:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\theta-\xi)\right)\mathrm{d}\xi \tag{9.31}$$

令 $z=\frac{r}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi-\theta)}$，则 $\mathrm{Re}\,(z^n)=\frac{r^n}{a^n}\cos n(\xi-\theta)$，易见 $|z|<1$a.e.，于是:

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\theta-\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{z}^n-1=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-\overline{z}}-1=\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\xi)} \tag{9.32}$$

因此我们得:

$$u(r,\theta)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\xi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\xi-\theta)}\mathrm{d}\xi \tag{9.33}$$

即为圆盘上的调和方程的 **Poisson** 公式。

例 9.2: 二维扇形

在半径为 R，顶角为 α 的扇形区域中求解调和方程边值问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & 0<r<R,0<\theta<\alpha\\ u\Big|_{\theta=0}=u\Big|_{\theta=\alpha}=0\\ u\Big|_{r=R}=f(\theta)\end{cases} \tag{9.34}$$

解: 在极坐标下为:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad 0<r<R, 0<\theta<\alpha \\ u\big|_{\theta=0}=u\big|_{\theta=\alpha}=0 \\ u\big|_{r=R}=f(\theta) \end{cases} \tag{9.35}$$

设分离型的解为 $R(r)\Theta(\theta)$，满足边值条件。那么:

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=0 \tag{9.36}$$

$$\implies \frac{\Theta''}{\Theta}=-\frac{r^2R''+rR'}{r^2}\triangleq -\lambda \tag{9.37}$$

于是，求解 Sturm-Liouville 方程:

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\alpha)=0 \end{cases} \tag{9.38}$$

得:

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}, \Theta_n(\theta)=\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}, n\in\mathbb{N}_+ \tag{9.39}$$

于是:

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}R=0 \tag{9.40}$$

令 $t=\ln r$ 得:

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}R=0 \implies R_n(r)=A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_nr^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \implies R_n(r)=A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}} \tag{9.41}$$

这是因为解有界。那么代入边值条件得:

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nR^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha} \tag{9.42}$$

解得:

$$A_n=\frac{2}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{\alpha}\mathrm{d}\xi \tag{9.43}$$

因此我们得:

$$\begin{aligned} u(r,\theta)=&\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi(\xi-\theta)}{\alpha}-\cos\frac{n\pi(\xi+\theta)}{\alpha}\right)\mathrm{d}\xi \\ =&\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\xi)\left(\frac{(Rr)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi(\xi-\theta)}{\alpha}-r^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{R^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(Rr)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi(\xi-\theta)}{\alpha}}+\frac{(Rr)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi(\xi+\theta)}{\alpha}-r^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{R^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(Rr)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi(\xi+\theta)}{\alpha}}\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{9.44}$$

注记 9.1.1: 当区域是圆环或圆盘外侧时，$R(r)$ 项的取舍方法不同。

例 9.3: 二维圆环

考虑二维圆环上的调和方程:

$$\begin{cases} \Delta u=0, & R_1<r<R_2 \\ u\big|_{r=R_1}=f_1(\theta), u\big|_{r=R_2}=f_2(\theta), & 0\leqslant\theta<2\pi \end{cases} \tag{9.45}$$

解：设分离型解为 $R(r)\Theta(\theta)$，那么特征函数、特征值和圆盘上的情形相同：

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \Theta_0(\theta) = 1, & n = 0 \\ \lambda_n = n^2, \begin{cases} \Theta_{n,1}(\theta) = \cos n\theta \\ \Theta_{n,2}(\theta) = \sin n\theta \end{cases}, & n \in \mathbb{N}_+ \end{cases} \tag{9.46}$$

同样地，求解关于 $R(r)$ 的方程得：

$$\begin{cases} R_0(t) = C_0 + D_0 \ln r, & n = 0 \\ R_n(t) = C_n r^n + D_n r^{-n}, & n \in \mathbb{N}_+ \end{cases} \tag{9.47}$$

设方程的形式解为：

$$u(r,\theta) = \frac{a_0 \ln \frac{r}{R_2} + c_0 \ln \frac{R_1}{r}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta + c_n r^{-n} \cos n\theta + d_n r^{-n} \sin n\theta\right) \tag{9.48}$$

取边界条件得：

$$\begin{cases} f_1(\theta) = \frac{a_0}{2} \ln \frac{R_1}{R_2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n R_1^n + c_n R_1^{-n}\right) \cos n\theta + \left(b_n R_1^n + d_n R_1^{-n}\right) \sin n\theta\right) \\ f_2(\theta) = \frac{c_0}{2} \ln \frac{R_1}{R_2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n R_2^n + c_n R_2^{-n}\right) \cos n\theta + \left(b_n R_2^n + d_n R_2^{-n}\right) \sin n\theta\right) \end{cases} \tag{9.49}$$

解得，对 $n \in \mathbb{N}_+$：

$$\begin{cases} a_0 \ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\xi) \mathrm{d}\xi \\ a_n R_1^n + c_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\xi) \cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ b_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\xi) \sin n\xi \mathrm{d}\xi \\ c_0 \ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\xi) \mathrm{d}\xi \\ a_n R_2^n + c_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\xi) \cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ b_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\xi) \sin n\xi \mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{9.50}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \begin{pmatrix} R_1^n & R_1^{-n} \\ R_2^n & R_2^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\xi & \sin n\xi \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{9.51}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\ln R_1 - \ln R_2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \frac{R_1^n R_2^n}{R_1^{2n} - R_2^{2n}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R_2^{-n} & -R_1^{-n} \\ -R_2^n & R_1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\xi & \sin n\xi \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{9.52}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi(\ln R_1 - \ln R_2)} \int_0^{2\pi} f_1(\xi) \mathrm{d}\xi \\ c_0 = \frac{1}{\pi(\ln R_1 - \ln R_2)} \int_0^{2\pi} f_2(\xi) \mathrm{d}\xi \\ a_n = \frac{1}{\pi\left(R_1^{2n} - R_2^{2n}\right)} \int_0^{2\pi} \left(R_1^n f_1(\xi) - R_2^n f_2(\xi)\right) \cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ b_n = \frac{1}{\pi\left(R_1^{2n} - R_2^{2n}\right)} \int_0^{2\pi} \left(R_1^n f_1(\xi) - R_2^n f_2(\xi)\right) \sin n\xi \mathrm{d}\xi \\ c_n = \frac{R_1^n R_2^n}{\pi\left(R_1^{2n} - R_2^{2n}\right)} \int_0^{2\pi} \left(R_1^n f_2(\xi) - R_2^n f_1(\xi)\right) \cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ d_n = \frac{R_1^n R_2^n}{\pi\left(R_1^{2n} - R_2^{2n}\right)} \int_0^{2\pi} \left(R_1^n f_2(\xi) - R_2^n f_1(\xi)\right) \sin n\xi \mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{9.53}$$

因此，原方程的解为：

$$
\begin{aligned}
&u(r,\theta)\\
=&\frac{a_0\ln\frac{r}{R_2}+c_0\ln\frac{R_1}{r}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nr^n\cos n\theta+b_nr^n\sin n\theta+c_nr^{-n}\cos n\theta+d_nr^{-n}\sin n\theta\right)\\
=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\ln\frac{r}{R_2} & \ln\frac{R_1}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ c_0\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}r^n & r^{-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\begin{pmatrix}\frac{\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\\ \frac{\ln\frac{R_1}{r}}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\end{pmatrix}^T+2\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^n-\left(\frac{r}{R_2}\right)^{-n}}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-n}}\\ \frac{\left(\frac{R_1}{r}\right)^n-\left(\frac{R_1}{r}\right)^{-n}}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-n}}\end{pmatrix}^T\cos(n(\xi-\theta))\right)\begin{pmatrix}f_1(\xi)\\ f_2(\xi)\end{pmatrix}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
\tag{9.54}
$$

9.1.3 Neunann 边界条件

类似于 Dirichlet 边界条件，不再讨论。

9.1.4 混合边界条件

考虑如下的 Sturm-Liouville 特征值问题：

$$
\begin{cases}
X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l\\
X(0)=0,\ X'(l)+a_lX(l)=0
\end{cases}
\tag{9.55}
$$

其中 $a_l\geqslant 0$.

由 Sturm-Liouville 理论，$\lambda>0$. 于是：$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$，代入右侧边界条件得：

$$
\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}l+a_l\sin\sqrt{\lambda_n}l=0 \iff \sqrt{\lambda_n}+a_l\tan\left(\sqrt{\lambda_n}l\right)=0
\tag{9.56}
$$

易见，有可列个解，且趋向于 $+\infty$.

考虑热方程初边值问题：

$$
\begin{cases}
u_t=ku_{xx}, & 0<x<l, t>0\\
u\big|_{t=0}=\varphi(x)\\
u\big|_{x=0}=0,\ (u_x+a_lu)\big|_{x=l}=0
\end{cases}
\tag{9.57}
$$

形式解即为:

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^l\varphi(s)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}s\right)\mathrm{d}s}{\int_0^l\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}s\right)\mathrm{d}s}\exp\left(-k\lambda_nt\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)
\tag{9.58}
$$

注记 9.1.2: 在利用广义 Fourier 级数进行展开时，需要进行规范化！

9.1.5 Robin 边界条件

$$
\begin{cases}
X''(x)+\lambda X(x)=0\\
X'(0)-a_0X(0)=0,\ X'(l)+a_lX(l)=0
\end{cases}
\tag{9.59}
$$

1. $a_0, a_l \geqslant 0$，则 $\lambda \geqslant 0$，当且仅当 $a_0 = a_l = 0$ 时 $\lambda = 0$ 是特征值。
2. $a_0 < 0, a_l > 0$: $(X(x) = \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x + a_0\sin\sqrt{\lambda}x$，则代入右侧边界条件得: $(a_0+a_l)\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + (a_0a_l - \lambda)\sin\sqrt{\lambda}l = 0$，也即：$\tan\left(\sqrt{\lambda}l\right) = \frac{(a_0+a_l)\sqrt{\lambda}}{\lambda - a_0a_l}$. 那么：
   (a) $a_0 + a_l > -a_0a_l l$，则 $\lambda_n > 0$.
   (b) $a_0 + a_l = -a_0a_l l$，则 $\lambda_0 = 0, \lambda_n > 0$.
   (c) $a_0 + a_l < -a_0a_l l$，则 $\lambda_0 < 0, \lambda_n > 0$.

推论 9.1.1: 不同的齐次边界条件对应的分离变量法方程：

1. Dirichlet 边界条件：$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$，解为：$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, n \in \mathbb{N}_+$.
2. Neumann 边界条件：$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$，解为：$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, n \in \mathbb{N}$.
3. Robin 边界条件 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) - h_0X(0) = X'(l) + h_lX(l) = 0 \end{cases}$
4. 混合边界条件：两边值条件所属类型不同。

9.2 非齐次方程

思想：对于非齐次问题，我们使用类似于常数变易法的方式进行求解。

9.2.1 波动方程和热方程

注记 9.2.1: 我们以下均以 Dirichlet 边界条件为例，其他形式的边界条件类似处理。

波动方程

考虑 Dirichlet 边界条件的非齐次波动方程初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = f(x,t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \\ u\big|_{x=0} = g_1(x),\ u_x\big|_{x=0} = g_2(x) \end{cases} \tag{9.60}$$

我们先将边界条件其次化，引入辅助函数 (Dirichlet 边界条件下)：

$$h(x,t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)}{l}x + g_1(t) \tag{9.61}$$

则函数 $v(x,t) = u(x,t) - h(x,t)$ 满足方程：

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2v_{xx} + \tilde{f}(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ v\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),\ v_t\big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \\ v\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{9.62}$$

其中 $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - h_{tt}(x,t), \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - h\big|_{t=0}, \tilde{\psi}(x) = \psi(x) - h_t\big|_{t=0}$.

因为对应的齐次方程的分离型的特征函数为 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$，所以我们设方程9.62的解具有形式：

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{9.63}$$

代入方程9.62得：

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{n}\left(T_n''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = \tilde{f}(x,t) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \tilde{\varphi}(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \tilde{\psi}(x) \end{cases} \tag{9.64}$$

$$\begin{cases} T_n''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t) = \hat{\tilde{f}}_n(t) \\ T_n(0) = \hat{\tilde{\varphi}}_n \\ T_n'(0) = \hat{\tilde{\psi}}_n \end{cases} \tag{9.65}$$

其中 $\hat{\tilde{f}}_n(t), \hat{\tilde{\varphi}}_n, \hat{\tilde{\psi}}_n$ 分别为 $\tilde{f}(x,t), \tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x)$ 的第 n 个广义 Fourier 系数。解得：

$$T_n(t) = \hat{\tilde{\varphi}}_n\cos\frac{cn\pi t}{l} + \frac{l}{cn\pi}\hat{\tilde{\psi}}_n\sin\frac{cn\pi t}{l} + \frac{l}{cn\pi}\int_0^t \hat{\tilde{f}}_n(\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \tag{9.66}$$

则方程9.60的解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{\tilde{\varphi}}_n\cos\frac{cn\pi t}{l} + \frac{l}{cn\pi}\hat{\tilde{\psi}}_n\sin\frac{cn\pi t}{l} + \frac{l}{cn\pi}\int_0^t \hat{\tilde{f}}_n(\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + h(x,t) \tag{9.67}$$

9.2.2 热方程

考虑 Dirichlet 边界条件的非齐次热方程初边值问题：

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u\big|_{x=0} = g_1(x),\ u_x\big|_{x=0} = g_2(x) \end{cases} \tag{9.68}$$

我们先将边界条件其次化，引入辅助函数 (Dirichlet 边界条件下)：

$$h(x,t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)}{l}x + g_1(t) \tag{9.69}$$

则函数 $v(x,t) = u(x,t) - h(x,t)$ 满足方程：

$$\begin{cases} v_{tt} = kv_{xx} + \tilde{f}(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ v\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),\ v_t\big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \\ v\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{9.70}$$

其中 $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - h_{tt}(x,t), \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - h\big|_{t=0}$.

因为对应的齐次方程的分离型的特征函数为 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$，所以我们设方程9.70的解具有形式：

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{9.71}$$

代入方程9.70得：

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{n} \left(T_n'(t) + \frac{kn^2\pi^2}{l^2} T_n(t)\right) \sin \frac{n\pi x}{l} = \tilde{f}(x,t) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = \tilde{\varphi}(x) \end{cases} \tag{9.72}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{kn^2\pi^2}{l^2} T_n(t) = \hat{\tilde{f}}_n(t) \\ T_n(0) = \hat{\tilde{\varphi}}_n \end{cases} \tag{9.73}$$

其中 $\hat{\tilde{f}}_n(t), \hat{\tilde{\varphi}}_n$ 分别为 $\tilde{f}(x,t), \tilde{\varphi}(x)$ 的第 n 个广义 Fourier 系数。解得：

$$T_n(t) = \hat{\tilde{\varphi}}_n \mathrm{e}^{-\frac{kn^2\pi^2}{l^2} t} + \int_0^t \hat{\tilde{f}}_n(\tau) \mathrm{e}^{-\frac{kn^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau \tag{9.74}$$

则方程9.68的解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{\tilde{\varphi}}_n \mathrm{e}^{-\frac{kn^2\pi^2}{l^2} t} + \int_0^t \hat{\tilde{f}}_n(\tau) \mathrm{e}^{-\frac{kn^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau\right) \sin \frac{n\pi x}{l} + h(x,t) \tag{9.75}$$

注记 9.2.2: 边界条件齐次化的拟合函数：

1. Dirichlet 边界条件、Robin 边界条件：令 $h(x,t) = xA(t) + B(t)$.
2. Neumann 边界条件：令 $h(x,t) = x^2 A(t) + xB(t)$

注记 9.2.3: 求解方法：

1. Fourier 方法：通用方法 (必须将边界条件齐次化)，类似高维 PDE 的 Galerkin 方法。
2. 特解法：找到特解，然后相减，求解齐次方程。对于一般的非齐次问题，先将边界齐次化，再用特解法求解 (否则会导致之后的求解继续出现非齐次项)。一般来说，当非齐次项是关于 x 或 t 的一元函数时，可以求解一个常微分方程，得到一个特解。
3. Duhamel 原理：经典方法。

例 9.4: 求所有的 $\omega \in \mathbb{R}$，使得波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(\omega t), \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{9.76}$$

的解在 $[0,l] \times [0,+\infty)$ 上有界。

解: 因为该方程关于 ω 对称，不妨设 $\omega \geqslant 0$. 设方程的解具有形式：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{9.77}$$

代入原方程得：

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sin\frac{\pi x}{l}\sin(\omega t) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0 \end{cases} \tag{9.78}$$

解得：

$$\begin{cases} T_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=\frac{2}{l}\sin(\omega t)\int_0^l\sin\frac{n\pi s}{l}\sin\frac{\pi s}{l}\mathrm{d}s=\sin(\omega t)\delta_{n,1} \\ T_n(0)=T_n'(0)=0 \end{cases} \tag{9.79}$$

解此二阶 ODE 得：

$$\begin{aligned} T_n(t)=&\frac{l\delta_{n,1}}{cn\pi}\int_0^t\sin(\omega\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \\ =&\frac{l\delta_{n,1}}{2cn\pi}\int_0^t\left(\cos\frac{cn\pi t-(cn\pi+l\omega)\tau}{l}-\cos\frac{cn\pi t-(cn\pi-l\omega)\tau}{l}\right)\mathrm{d}\tau \\ =&\frac{l\delta_{n,1}}{2cn\pi}\int_0^t\left(\cos\left(\frac{cn\pi+l\omega}{l}\tau-\frac{cn\pi t}{l}\right)-\cos\left(\frac{cn\pi-l\omega}{l}\tau-\frac{cn\pi t}{l}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\ =&\begin{cases} \frac{l^2}{c^2\pi^2-l^2\omega^2}\left(\sin(\omega t)-\frac{l\omega}{c\pi}\sin\frac{c\pi t}{l}\right), & n=1,\omega\neq\frac{c\pi}{l} \\ \frac{l^2\sin(\omega t)}{c\pi(c\pi+l\omega)}-\frac{lt}{2c\pi}\cos(\omega t), & n=1,\omega=\frac{c\pi}{l} \\ 0, & n\geqslant 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{9.80}$$

于是，原方程的解为：

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{l^2}{c^2\pi^2-l^2\omega^2}\left(\sin(\omega t)-\frac{l\omega}{c\pi}\sin\frac{c\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}, & c\pi\neq l\omega \\ \left(\frac{l^2\sin(\omega t)}{c\pi(c\pi+l\omega)}-\frac{lt}{2c\pi}\cos(\omega t)\right)\sin\frac{\pi x}{l}, & c\pi=l\omega \end{cases} \tag{9.81}$$

因此，原方程的解有界，当且仅当 $\omega\neq\pm\frac{c\pi}{l}$.

二维 Poisson 方程的边值问题

对于某些区域，如圆盘、扇形和矩形，可以使用分离变量法进行求解。

考虑二维矩形上的 Dirichlet 边值条件的 Poisson 方程：

$$\begin{cases} \Delta u=F(x,y), & 0<x<a,0<y<b \\ u\big|_{x=0}=f_1(y),\ u\big|_{x=a}=f_2(y) \\ u\big|_{y=0}=g_1(x),\ u\big|_{y=b}=g_2(x) \end{cases} \tag{9.82}$$

取拟合函数：

$$h_1(x,y)=\frac{f_2(y)-f_1(y)}{a}x+f_1(y) \tag{9.83a}$$

$$h_2(x,y)=\frac{g_2(x)-g_1(x)}{b}y+g_1(x) \tag{9.83b}$$

令 $v=u-h_1,w=u-h_2$，再使用 Fourier 展开方法。

例 9.5: 求解：

$$\begin{cases} \Delta u = -2x, & x^2+y^2<1 \\ u\big|_{x^2+y^2=1} = 0 \end{cases} \tag{9.84}$$

解: 做极坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，记 $u = u(r,\theta)$，则：

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = -2r\cos\theta, & 0<r<1 \\ u\big|_{r=1} = 0 \end{cases} \tag{9.85}$$

考虑齐次方程 $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ 的分离解 $R(r)\Theta(\theta)$，满足：

$$\begin{cases} \Theta(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases} \tag{9.86}$$

解得：$\lambda_n = n^2$，$\Theta_n(\theta) = \cos n\theta, n \in \mathbb{N}$ 或 $\Theta_n(\theta) = \sin n\theta, n \in \mathbb{N}_+$. 因此设形式解为：

$$u(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos n\theta + b_n(r)\sin n\theta) \tag{9.87}$$

代入原方程得：

$$\begin{cases} a_1'' + \frac{1}{r}a_1' - \frac{1}{r^2}a_1 = -2r \\ a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0, & n \neq 1 \\ b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0, & n \in \mathbb{N}_+ \end{cases} \tag{9.88}$$

后两式均是 Euler 方程，通解：$A_n r^n + B_n r^{-n}$. 由边界条件：$a_n(1) = 0, |a_n(0)| < +\infty, b_n(1) = 0, |b_n(0)| < +\infty$，因此：$a_n(r) = 0\, n \neq 1$, $b_n(r) = 0$，且非齐次方程的通解为 $a_1(r) = c_1 r + c_2 r^{-1} - \frac{r^3}{4}$，于是 $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0$，则：

$$u = \frac{1-r^2}{4}r\cos\theta = \frac{1-x^2-y^2}{4}x \tag{9.89}$$

解: 另解：注意到：极坐标下有特解 $w = -\frac{r^3}{4}\cos\theta$，则可以通过化简，再利用 Laplace 方程解的唯一性，解得原方程的解。

第十章 调和方程与 Green 函数

10.1 Laplace/调和方程

n 维 Laplace/调和方程为：

$$\Delta u = 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 2 \tag{10.1}$$

其中：

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla \cdot \nabla \tag{10.2}$$

10.1.1 正交变换不变性

定理 10.1.1: Δ 的正交变换不变性

设 $\mathbf{B}$ 为 n 阶实正交方阵，坐标列向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，则在正交坐标变换 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ 下，Laplace 算子不变。

证明: 因为：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x_1}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x_2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \iff \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}} \tag{10.3}$$

所以：

$$\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} = \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}^T \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} = \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}^T \nabla_{\mathbf{x}} = \Delta_{\mathbf{x}} \tag{10.4}$$

定理 10.1.2: Δ 的极坐标形式

二维情形 令 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$，则该变换的 Jacobi 矩阵为：

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{10.5}$$

逆变换的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \tag{10.6}$$

于是：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

$$\Longrightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{10.8}$$

三维情形 使用一些简单的方法进行求解。

1. 降维法：令 $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$，$(r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$，令 $s = r\sin\theta$. 由：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ =&\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ =&\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ =&\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \tag{10.9}$$

且：

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{10.10}$$

相加即得：

$$\begin{aligned} \Delta =&\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ =&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \tag{10.11}$$

2. 直接法：任取 $u(x, y, z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$(具有紧支集的光滑函数)，于是，对于任何具有良好性质的 v，使用分部积分法：

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} v\Delta u \mathrm{d}\mathbf{x} \\ =&-\int_{\mathbb{R}^3} \nabla v \cdot \nabla u \mathrm{d}\mathbf{x} \\ =&-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ =&\int_{\mathbb{R}^3}\frac{v}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{10.12}$$

于是：

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{10.13}$$

10.1.2 最大值原理与解的唯一性

定理 10.1.3: 下调和函数的最大值原理

设开区域 $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ 有界，$u \in C^2(D) \cup C(\overline{D})$ 在 D 上满足下调和方程 $\Delta u \geqslant 0$，则：

$$\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u \tag{10.14}$$

证明: 反设 $\max\limits_{\overline{D}} u > \max\limits_{\partial D} u$，令 $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x}|^2$，则当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，满足 $\max\limits_{\overline{D}} v > \max\limits_{\partial D} v$. 设 $\max\limits_{\overline{D}} v = v(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in D$，那么：$\Delta v(\mathbf{x}_0) \leqslant 0$(由极大值处 Hesse 矩阵的半负定性). 但是：$\Delta v(\mathbf{x}_0) = \Delta u(\mathbf{x}_0) + 2n\varepsilon \geqslant 2n\varepsilon > 0$，矛盾！ □

定理 10.1.4: 二阶椭圆方程一种情形下的下解最大值原理

设微分算子 $\mathcal{L}[u]=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$，$\overline{D}$ 为有界开区域，设 $\mathbf{A}(\mathbf{x})=\left(a_{ij}(\mathbf{x})\right)_{n\times n}$ 为 $\overline{D}$ 上的实对称的一阶连续可微正定矩阵函数，则：

1. 对于满足方程 $\mathcal{L}[u]\geqslant 0$ 的 u，$\max\limits_{\overline{D}} u=\max\limits_{\partial D}.$
2. 对于满足方程 $\mathcal{L}[u]+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\geqslant 0$ 的 u，其中 $c\geqslant 0$，$\max\limits_{\overline{D}} u\leqslant\max\limits_{\partial D}\{0,u\}.$

证明: 假设 $u(\mathbf{x}_0)=\max\limits_{\overline{D}} u>\max\limits_{\partial D} u$，则 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)>0$，设正交方阵 $\mathbf{P}$ 使得：$\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)\mathbf{P}^T=\mathbf{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)>0$，设 $\forall 1\leqslant i\leqslant n,\lambda_i\geqslant\mu>0$. 设 $\mathbf{P}=\left(p_{ij}\right)_{n\times n}$，令 $\mathbf{y}=\mathbf{x}_0+\mathbf{P}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right),\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{P}^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\right)$. 那么：

$$\mathcal{L}[u](\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)\tag{10.15}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\tag{10.16}$$

$$\triangleq\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}p_{ki}p_{lj}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_i}\tag{10.17}$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{P}^T\right)_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial y_i}\tag{10.18}$$

其中 $b_i(\mathbf{y})$ 一阶连续可微有界。那么：

$$\mathcal{L}[u](\mathbf{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial u}{\partial y_i}\tag{10.19}$$

当 $\mathcal{L}[u]\geqslant 0$，由假设知，对于任意 $\lambda>0$，存在足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $v(\mathbf{y})=u(\mathbf{y})+\varepsilon\mathrm{e}^{\lambda y_1}$ 仍在 D 内的最大值 $v(\mathbf{y}_0)$ 大于 ∂D 的最大值；同时，我们可以取 $\lambda>0$ 足够大，使得：

$$\mathcal{L}[v]=\mathcal{L}[u]+\varepsilon\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda y_1}\right]\geqslant\varepsilon\mathrm{e}^{\lambda y_1}\left(\lambda^2\left(\mathbf{PAP}^T\right)_{1,1}-\lambda\|\mathbf{b}\|\right)>0\text{ in }\overline{D}\tag{10.20}$$

但是，在 $\mathbf{y}_0$ 处，$\nabla_{\mathbf{y}}v=\mathbf{0},\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\leqslant 0$，所以：

$$\mathcal{L}[v](\mathbf{y}_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial v}{\partial y_i}\leqslant\mu\Delta v(\mathbf{y}_0)+0\leqslant 0\tag{10.21}$$

因此矛盾！

当 $\mathcal{L}[u]+c(\mathbf{x})u\geqslant 0$ 时，设 $V=\{\mathbf{x}\in D|u(\mathbf{x})>0\}$. 当 $V=\emptyset$ 时，$\max_{\overline{D}} u\leqslant 0$. 当 $V\neq\emptyset$ 时，在 V 上有：$c(\mathbf{x})u\leqslant 0$，那么 $\mathcal{L}[u]\geqslant 0$，由上一种情形知：$\max\limits_{\overline{D}} v=\max\limits_{\overline{V}} u=\max\limits_{\partial V} u$. 综上，$\max\limits_{\overline{D}} u\leqslant\max\limits_{\partial D}\{0,u\}$. □

定理 10.1.5: 解的唯一性 (Dirichlet 边界条件)

设 $f\in C(D),g\in C(\partial D)$，则 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程

$$\begin{cases}\Delta u=f, & \mathbf{x}\in D\\ u\big|_{\partial D}=g\end{cases}\tag{10.22}$$

至多有一个属于 $C^2(D)\cap C(\overline{D})$ 的解。

证明: 利用最大值原理

等价于证明：Laplace 方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \mathbf{x} \in D \\ u\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.23}$$

有且仅有解 $u = 0$. 事实上，由最大值原理，$0 = \min\limits_{\partial D} u = \min\limits_{\overline{D}} \leqslant u \leqslant \max\limits_{\overline{D}} = \max\limits_{\partial D} = 0$，于是 $u \equiv 0$. □

证明: 利用能量法

定义能量：

$$E = \int_D |\nabla u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \geqslant 0 \tag{10.24}$$

当 $f = g = 0$ 时，由 Gauss 公式：

$$E = \int_D \left(|\nabla u|^2 + u\Delta u \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_D \nabla \cdot (u\nabla u) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial D} u\nabla u \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \tag{10.25}$$

$$\Longrightarrow \nabla u \equiv \mathbf{0} \tag{10.26}$$

于是 $u \equiv 0$. □

定理 10.1.6: 解的唯一性 (Neumann 边界条件)

设 $f \in C(D), g \in C(\partial D)$，则 Neumann 边界条件的 Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \mathbf{x} \in D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial D} = g \end{cases} \tag{10.27}$$

属于 $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 的解之间仅相差常数。

证明: 只需要证明：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.28}$$

的解均为常数。根据 Green 第一公式：

$$0 = \int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}S = \int_D \left(|\nabla u|^2 + u\Delta u \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_D |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{10.29}$$

因此 $\nabla u \equiv 0$，那么解为常数。 □

定理 10.1.7: 解的唯一性 (Robin 边界条件的一种情形)

设 $f \in C(D), g \in C(\partial D)$，则 Neumann 边界条件的 Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \mathbf{x} \in D \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au \right)\big|_{\partial D} = g \end{cases} \tag{10.30}$$

属于 $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 的解唯一，其中 $a > 0$.

证明: 只需要证明：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au\right)\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.31}$$

的解唯一 $(a > 0)$. 由 Green 第一公式：

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}S = \int_D \left(|\nabla u|^2 + u\Delta u\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{10.32}$$

$$\iff 0 \geqslant \int_{\partial D} -au^2 \mathrm{d}S = \int_D |\nabla u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \geqslant 0 \tag{10.33}$$

于是，$u \equiv 0$. □

定理 10.1.8: 三圆定理

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是以原点为中心的唤醒区域，大圆和小圆的半径分别为 R_2 和 R_1，$u(x, y)$ 是 D 上的下调和函数。记 $M(r) = \max\limits_{x^2+y^2=r^2} u(x, y), R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$，则：

$$M(r) \leqslant \frac{M(r_1) \ln \frac{r_2}{r} + M(r_2) \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{10.34}$$

证明: 令 $\varphi(r) = a + b \ln r$，令 $\varphi(r_1) = M(r_1), \varphi(r_2) = M(r_2)$，代入得:

$$\varphi(r) = \frac{M(r_1) \ln \frac{r_2}{r} + M(r_2) \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{10.35}$$

令 $v(x, y) = u(x, y) - \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$，易见 v 是调和的，那么：

$$\begin{cases} \Delta v \geqslant 0, & r_1 < r < r_2 \\ v \leqslant 0, & r = r_1, r = r_2 \end{cases} \tag{10.36}$$

由下调和函数的最大值原理，$v \leqslant 0, r_1 < r < r_2$，也即：$u \leqslant \varphi, r_1 < r < r_2$，那么 $M(r) \leqslant \varphi(r), r_1 < r < r_2$. □

10.2 Laplace 方程的分离变量法

10.2.1 二维情形

具体讨论见上一章的分离变量法内容。

定理 10.2.1: Poisson 公式9.33

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\xi - \theta)} \mathrm{d}\xi = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \mathrm{d}S(\mathbf{x}') \tag{10.37}$$

且满足平均值公式。

10.2.2 三维情形

考虑球上的 Laplace 方程：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)u=0, \quad \mathbf{x}\in D \\ u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{10.38}$$

求满足方程的分离解：$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，代入得：

$$\frac{\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{(\Theta'\sin\theta)'}{\Theta\sin\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}=0 \tag{10.39}$$

10.3 Green 第一和第二公式

10.3.1 两个公式

定理 10.3.1: 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 有界，ν 为 ∂D 的单位外法向量，由 Gauss 公式：

$$\int_D \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{10.40}$$

取 $\mathbf{F}=v\nabla u$，其中 $u,v\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$，那么得 **Green** 第一公式：

$$\int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\int_{\partial D}(v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_D\nabla\cdot(v\nabla u)\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_D(\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u)\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{10.41}$$

对称地，我们也有：

$$\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\int_D(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{10.42}$$

两式相减，得 **Green** 第二公式：

$$\int_D(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S \tag{10.43}$$

推论 10.3.1: 取 $v\equiv 1$，由 Green 第二公式，Neumann 边界条件的 Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta u=f, & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial D}=g \end{cases} \tag{10.44}$$

有解的必要条件为：

$$\int_{\partial D} g=\int_D f \tag{10.45}$$

10.3.2 平均值公式及其应用

引理 10.3.1: 对于 $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$ 上的 $u\in C^2(D)$，当 $B_R(\mathbf{x})\subset D$ 时，有恒等式：

$$u(\mathbf{x})=\frac{1}{n\omega_nR^{n-1}}\int_{\partial B_R(\mathbf{x})}u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})+\int_{B_R(\mathbf{x})}\left(K_n\left(|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\right)-K_n\left(R\right)\right)\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{10.46}$$

$$=\fint_{S_R(\mathbf{x})}u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})-\int_0^R\left(\fint_{S_r(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}r \tag{10.47}$$

其中 $\omega_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球体积，$V_n(\mathbf{x})=\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}|, & n=2 \\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n|\mathbf{x}|^{n-2}}, & n\geqslant 3 \end{cases}$ 为基本解，$V_n(\mathbf{x})=K_n(|\mathbf{x}|)$.

证明: 当 $n \geqslant 3$ 时:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
\xlongequal{\mathbf{y}=\mathbf{x}+R\mathbf{z}}&\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x}+R\mathbf{z})\mathrm{d}\hat{S}(\mathbf{z}) \quad \left(\mathrm{d}S(\mathbf{y})=R^{n-1}\mathrm{d}\hat{S}(\mathbf{z})\right) \\
=&\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(\mathbf{0})}\left(u(\mathbf{x})+\int_0^R \frac{\partial u(\mathbf{x}+r\mathbf{z})}{\partial r}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\hat{S}(\mathbf{z}) \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(\mathbf{0})}\int_0^R \nabla u(\mathbf{x}+r\mathbf{z})\cdot\mathbf{z}\mathrm{d}r\mathrm{d}\hat{S}(\mathbf{z}) \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n\omega_n}\int_0^R\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla u(\mathbf{x}+r\mathbf{z})\cdot\mathbf{z}\mathrm{d}\hat{S}(\mathbf{z})\mathrm{d}r \\
\xlongequal{\mathbf{y}=\mathbf{x}+r\mathbf{z}}&u(\mathbf{x})+\int_0^R\left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(\mathbf{x})}\nabla u(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{r}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}r \\
=&u(\mathbf{x})+\int_0^R\left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(\mathbf{x})}\frac{\partial u(r)}{\partial \nu}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}r \\
=&u(\mathbf{x})+\int_0^R\left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\mathrm{d}r \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n\omega_n}\int_0^R\left(\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^r\left(\int_{\partial B_\xi(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}r \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n\omega_n}\int_0^R\left(\int_\xi^R\frac{1}{r^{n-1}}\left(\int_{B_\xi(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\xi \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n\omega_n}\int_0^R\left(\frac{\xi^{2-n}-R^{2-n}}{n-2}\int_{B_\xi(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\xi \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_0^R\int_{B_\xi(\mathbf{x})}\left(\frac{1}{\xi^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right)\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\mathrm{d}\xi \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{B_R(\mathbf{x})}\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right)\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}
\end{aligned}
\tag{10.48}
$$

当 $n=2$ 时，由上一种情况知:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_{\partial B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{2\pi}\int_0^R\left(\int_\xi^R\frac{1}{r}\left(\int_{B_\xi(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\xi \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{2\pi}\int_0^R\left(\ln\frac{R}{\xi}\int_{B_\xi(\mathbf{x})}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\xi \\
=&u(\mathbf{x})+\frac{1}{2\pi}\int_{B_R(\mathbf{x})}\ln\frac{R}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}
\end{aligned}
\tag{10.49}
$$

定理 10.3.2: 下调和函数的平均值定理 (球面平均和球体平均)

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 为有界开区域，$u\in C^2(D)$，那么:“$\Delta u\geqslant 0$ in D” 等价于: $\forall B_R(\mathbf{x})\subset D$:

$$u(\mathbf{x})\leqslant\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R(\mathbf{x})}u(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \tag{10.50a}$$

$$u(\mathbf{x})\leqslant\frac{1}{\omega_n R^{n}}\int_{B_R(\mathbf{x})}u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{10.50b}$$

其中 ω_n 为 n 维单位球的体积，$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$；$n\omega_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面的面积。

证明: 必要性：由上一个引理知：

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \int_{B_R(\mathbf{x})} \left(K_n\left(|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\right) - K_n\left(R\right)\right) \Delta u(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{10.51}$$

因为 $\Delta u \geqslant 0$，$K_n(r)$ 单调递增，所以不等式成立。对于球体平均，同理。

充分性：若存在一点 $\mathbf{x}_0 \in D$ 使得 $\Delta u(\mathbf{x}_0) < 0$，那么由 $u \in C^2(D)$ 知 $\exists r_0 > 0$ 使得 $\Delta u\big|_{B_{r_0}(\mathbf{x}_0)} > 0$，此时 u 是严格上调和的，那么上述过程中，不等式在 $B_{r_0}(\mathbf{x}_0)$ 中不等号取严格反号，那么不成立。 □

推论 10.3.2: 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 D 中的 (上/下) 调和函数列，且 $u_n(\mathbf{x}) \rightrightarrows u(\mathbf{x})$，那么 $u(\mathbf{x})$ 也是 (上/下) 调和的 (利用逆平均值定理证明)。

定理 10.3.3: Harnack 不等式

设 $u \geqslant 0$ in $D \subset \mathbb{R}^n$ 且 u 调和，任取 $V \subset D$ 是有界的连通子区域，则 $\exists C > 0$，使得：$\sup\limits_V u \leqslant C \inf\limits_V u$.

证明: 利用球上的 Green 函数进行证明。取 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = V(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - V()$

定理 10.3.4: Liouville 定理

全空间上的调和函数有上界或下界当且仅当其是常数。

证明: 设 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是调和函数，且 $u(x) \geqslant C \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，那么对于任意固定的 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$，任取 $r > 0, R = r + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$，则 $B_r(\mathbf{x}_1) \subset B_R(\mathbf{x}_2)$. 根据球体平均值原理：

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}_1) - C =& \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(\mathbf{x}_1)} u(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} - C \\
\leqslant& \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_R(\mathbf{x}_2)} u(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} - \frac{\omega_n\left(R^n - r^n\right)}{\omega_n r^n} C - C \\
=& \frac{R^n}{r^n} u(\mathbf{x}_2) - \frac{R^n}{r^n} C \\
=& \left(1 + \frac{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}{r}\right)^n (u(\mathbf{x}_2) - C)
\end{aligned} \tag{10.52}$$

令 $r \to +\infty$ 即得：$u(\mathbf{x}_1) \leqslant u(\mathbf{x}_2)$；同理，$u(\mathbf{x}_1) \geqslant u(\mathbf{x}_2)$，所以 $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n, u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_2)$. □

定理 10.3.5: 下调和函数的强最大值原理

设 u 是连通开区域 Ω(可以无界)(要求开是因为需要使用球体平均公式) 上的下调和函数，也即 $\Delta u\big|_\Omega \geqslant 0$，且存在 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 使得 $u(\mathbf{x}_0) = \sup\limits_\Omega u$，那么 u 是常数。

证明: 设 $M = \sup\limits_\Omega u$，定义 $\Omega_M = \{\mathbf{x} \in \Omega | u(\mathbf{x}) = M\}$ 为等值集。

一方面，由 $\mathbf{x}_0 \in \Omega_M$ 知 $\Omega_M \neq \emptyset$. 由 u 的连续性知 Ω_M 是 Ω 的相对闭集。另一方面，**任取** $z \in \Omega_M$，在 $B_R(z) \subset \Omega$ 中对下调和函数 $u - M$ 使用平均值公式：

$$0 = u(\mathbf{z}) - M \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(\mathbf{z})} (u(\mathbf{y}) - M) \mathrm{d}\mathbf{y} \leqslant 0 \tag{10.53}$$

由 $u \leqslant M$ 和 u 的连续性知 $u\big|_{B_R(\mathbf{z})} \equiv M$，因此 Ω_M 是 Ω 的相对开集。

因此，Ω_M 是 Ω 的既开又闭子集，由于 Ω 连通，所以 $\Omega_M=\Omega$或$\emptyset$，那么必然有 $\Omega_M=\Omega$，也即 $u\big|_\Omega\equiv M$. □

推论 10.3.3: 调和函数的比较原理 (类似热方程的情形，此处不再赘述)。

推论 10.3.4: 任意连通开区域 Ω 上的调和函数 u 同时取到最大最小值，当且仅当 u 是常数。

推论 10.3.5: 任何连通开区域上 (可以无界)，Poisson 方程和 Laplace 方程解的唯一性仍然成立。

定理 10.3.6: Dirichlet 原理 (Dirichlet 边界条件)

在有界开区域 D 上，令能量泛函 $E[w]=\frac{1}{2}\int_D|\nabla w|^2\mathrm{d}\mathbf{x}$, $w\in\mathcal{A}\triangleq\left\{w\in C^2(\overline{D})\middle|\,w\big|_{\partial D}=h(\mathbf{x})\right\}$，则 $u\in C^2(D)$ 为

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{in } D\\ u\big|_{\partial D}=h(\mathbf{x})\end{cases}\tag{10.54}$$

的解，当且仅当 $E[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}}E[w]$.

证明: 必要性：任取 $w\in\mathcal{A}$，则：

$$\begin{aligned}0&=\int_D(u-w)(-\Delta u)\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=-\int_{\partial D}(u-w)\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S+\int_D\nabla(u-w)\cdot\nabla u\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_D\left(|\nabla u|^2-\nabla w\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{10.55}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow&\int_D|\nabla u|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_D\nabla w\cdot\nabla u\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant\int_D|\nabla w||\nabla u|\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_D\left(|\nabla w|^2+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{10.56}$$

$$\Longleftrightarrow\quad E[u]\leqslant E[w],\ \forall w\in\mathcal{A}\tag{10.57}$$

充分性：设 u 是极小函数，任取 $v\in C_0^\infty(D)$，令 $e(t)=E[u+tv]$，易见 $u+tv\in\mathcal{A}$. 因为 $e(t)$ 在 $t=0$ 处取到极小值，所以 $e'(0)=0$. 另外：

$$e(t)=\frac{1}{2}\int_D\left(|\nabla u|^2+2t\nabla u\cdot\nabla v+t^2|\nabla v^2|\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\tag{10.58}$$

$$\Longrightarrow\ 0=e'(0)=\int_D\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S-\int_D v\Delta u\mathrm{d}\mathbf{x}=-\int_D v\Delta u\mathrm{d}\mathbf{x}\tag{10.59}$$

由 v 的任意性，$\Delta u\equiv 0$. □

定理 10.3.7: Dirichlet 原理 (Neumann 边界条件)

在有界开区域 D 上，令能量泛函 $E[w]=\frac{1}{2}\int_D|\nabla w|^2\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial D}hw\mathrm{d}S$, $w\in C^2(\overline{D})$，则 $u\in C^2(D)$ 为

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{in } D\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial D}=h(\mathbf{x})\end{cases}\tag{10.60}$$

的解，当且仅当 $E[u]=\min\limits_{w\in C^2(D)\cap C(\overline{D})}E[w]$.

证明: 设 u 是解，

推论 10.3.6: 对于 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程，能量为：

$$E[w]=\int_D\left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2-wf\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\tag{10.61}$$

10.4 一般情形下的 Green 函数

10.4.1 基本积分公式

考虑一般的有界区域上的 Poisson 方程边值问题：

$$\begin{cases}\Delta u=f(\mathbf{x}), & \text{in } D\\ \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\Big|_{\partial D}=\varphi(\mathbf{x})\end{cases}\tag{10.62}$$

我们考虑方程：

$$\Delta u=\delta(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\tag{10.63}$$

的径向对称的**基本解** (由 Fourier 变换求出) 为：

$$K(\mathbf{x})=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}|, & n=2\\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n|\mathbf{x}|^{n-2}}, & n\geqslant 3\end{cases}\tag{10.64}$$

显然，$V(\mathbf{x}-\mathbf{y})=K(\mathbf{x}-\mathbf{y})=K(\mathbf{y}-\mathbf{x})$($\mathbf{y}$ 为参数) 仅在 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 处有奇性，且 $\Delta V_{\mathbf{x}}=\Delta_{\mathbf{y}}V=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. 那么，对 $u\in C^2(D)$ 和充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $B_\varepsilon(\mathbf{x})\subset D$，注意到 $\frac{\partial V(r)}{\partial r}=\frac{r^{1-n}}{n\omega_n}$，且 u 在 $B_\delta(\mathbf{x})$ ($\delta>\varepsilon$) 中一致连续，所以由 Green 第二公式，取 $\delta_1\in(0,1)$：

$$-\int_D V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\tag{10.65}$$

$$=-\int_{D\backslash B_\varepsilon(\mathbf{x})}V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{B_\varepsilon(\mathbf{x})}V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\tag{10.66}$$

$$=-\int_{D\backslash B_\varepsilon(\mathbf{x})}V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right)\tag{10.67}$$

$$=\int_{D\backslash B_\varepsilon(\mathbf{x})}\left(u(\mathbf{y})\Delta V(\mathbf{y}-\mathbf{x})-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{y}+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right)\tag{10.68}$$

$$=\int_{\partial(D\backslash B_\varepsilon(\mathbf{x}))}\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial\nu}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y})+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right)\tag{10.69}$$

$$=\left(\int_{\partial D}-\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})}\right)\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial\nu}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y})+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right)\tag{10.70}$$

$$=\int_{\partial D}\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial\nu}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y})\tag{10.71}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})}\left(u(y)\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{1-n}}{n\omega_n}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y})+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right) &(10.72)\\
=&\int_{\partial D}\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \nu}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y}) &(10.73)\\
&-\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})}\frac{u(\mathbf{x})+o(1)}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}S(\mathbf{y})+\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})}V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\mathrm{d}S(\mathbf{y})+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right) &(10.74)\\
=&\int_{\partial D}\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \nu}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y}) &(10.75)\\
&-u(\mathbf{x})-o(1)+\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})}V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\mathrm{d}S(\mathbf{y})+o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right) &(10.76)\\
=&\int_{\partial D}\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \nu}-V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})+o(1)+o\left(\varepsilon^{1-\delta_1}\right)o\left(\varepsilon^{2-\delta_1}\right) &(10.77)
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得**基本积分公式** (representation formula)：

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x})&=\int_D V(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}+\int_{\partial D}\left(u(\mathbf{y})\frac{\partial V(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu}-V(\mathbf{x}-\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
&=(V*\Delta u)_D(\mathbf{x})+\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}*u-V*\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\partial D}(\mathbf{x})
\end{aligned}
\tag{10.78}
$$

注记 10.4.1: 基本积分公式10.78中包含了 $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial D}$ 和 $u\big|_{\partial D}$，而这两个条件在往往不是同时都能知道的，因此我们针对三种边值条件进行讨论。

推论 10.4.1: 由基本积分公式10.78的第一项 $\phi(x)=(V*\Delta u)_D(\mathbf{x})$ 给出的函数 ϕ 满足：$\Delta\phi=\Delta u\text{in } D$，因此由第二项 $\psi(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}*u-V*\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\partial D}(\mathbf{x})$ 给出的函数 ψ 满足 $\Delta\psi=0$ in D.

推论 10.4.2: 设 $\phi\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 2$ 具有有界支集，那么可以由 $\Delta\phi$ 求出 $\phi(\mathbf{x})$.

证明: 对于 $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$，总存在足够大的球 $B_R(\mathbf{x})$ 使得 $\mathrm{supp}\phi\subset B_R(\mathbf{x})$，也即 $\phi\big|_{(B_R(\mathbf{x}))^C}\equiv 0$. 那么由基本积分公式10.78：

$$
\phi(\mathbf{x})=\int_{B_R(\mathbf{x})}V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta\phi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{10.79}
$$

其中 $V(\mathbf{x})=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}|, & n=2\\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n|\mathbf{x}|^{n-2}}, & n\geqslant 3\end{cases}$ 为 Poisson 方程基本解。更一般地，令 $R\to+\infty$ 即得：

$$
\phi(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^n}V(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Delta\phi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}=(V*\Delta\phi)(\mathbf{x}) \tag{10.80}
$$

推论 10.4.3: 设 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 3$($n=2$ 时不一定成立)，那么 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的全体解为：

$$
u(\mathbf{x})=(V*\Delta f)(\mathbf{x})+C \tag{10.81}
$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为任意常数。

10.4.2 Green 函数的引入

Dirichlet 边界条件

$$\begin{cases} \Delta u = f(\mathbf{x}), & \text{in } D \\ u\big|_{\partial D} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{10.82}$$

为了消去未知的 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$，对 $V(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ 进行修正。引入修正函数 $H(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{x}\in D$，且 H 与区域 D 有关) 使得：

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, & \mathbf{y}\in D \\ H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -V(\mathbf{y}-\mathbf{x}), & \mathbf{y}\in\partial D \end{cases} \tag{10.83}$$

那么 $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \triangleq V(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 满足：

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}), & \mathbf{y}\in D \\ G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, & \mathbf{y}\in\partial D \end{cases} \tag{10.84}$$

由 Green 第二公式：

$$\int_D \big(H(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\partial D}\left(H(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu} - u(\mathbf{y})\frac{\partial_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \tag{10.85}$$

$$\Longleftrightarrow \int_D H(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\partial D} V(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu}\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} u(\mathbf{y})\frac{\partial_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu}\mathrm{d}S(\mathbf{y}) = 0 \tag{10.86}$$

代入基本积分公式10.78得，边值问题的解为：

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\partial D} u(\mathbf{y})\frac{\partial_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu}\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \tag{10.87}$$

也即 **Poisson** 公式。

定义 10.4.1: Dirichlet 边界条件的 Green 函数

称满足：

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}), & \text{in } D \\ G\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.88}$$

的解 $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = V(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 称作第一边值问题的 **Green** 函数。

注记 10.4.2: 边界条件是对 $\mathbf{x}\in\partial D$ 和 $\mathbf{y}\in\partial D$ 均成立的。

推论 10.4.4: Green 函数唯一 (因为它是某个广义 Poisson 方程的解)。

注记 10.4.3: 从物理意义看，第一边值问题的 Green 函数是在边界接地的条件下，$\mathbf{y}$ 处的单位点电荷在 $\mathbf{x}$ 点处产生的电势，易见具有对称性。

Neumann 边界条件

$$\begin{cases} \Delta u = f(\mathbf{x}), & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{10.89}$$

此种情形下，解不唯一。定义 Green 函数为：

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{1}{|D|}, & \text{in } D \\ \frac{\partial_{\mathbf{y}} G}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.90}$$

的解，则由 Green 第一公式，有解的必要条件为：

$$\int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) = \int_D f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{10.91}$$

解为：

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} - \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) + C \tag{10.92}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意常数。

Robin 边界条件

$$\begin{cases} \Delta u = f(\mathbf{x}0), & \text{in } D \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial D} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{10.93}$$

定义 Green 函数为：

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}), & \text{in } D \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial \nu}\right)\Big|_{\in \partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.94}$$

的解，则此时的解为：

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) =& \int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} - \frac{1}{\beta} \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\ =& G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \nu} \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{10.95}$$

定理 10.4.1: Green 函数的对称性

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x}) \tag{10.96}$$

证明: 固定 $\mathbf{x},\mathbf{y}$，且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. 令 $u(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z},\mathbf{y}), v(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z},\mathbf{x})$，$u, v$ 在 $D \backslash B_\varepsilon(\mathbf{y}) \backslash B_\varepsilon(\mathbf{x})$ 上无奇点。由 Green 第二公式：

$$\left(\int_{\partial D} - \int_{S_\varepsilon(\mathbf{y})} - \int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})}\right)\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \int_{D \backslash B_\varepsilon(\mathbf{y}) \backslash B_\varepsilon(\mathbf{x})} (u\Delta v - v\Delta u)\, \mathrm{d}\mathbf{z} = 0 \tag{10.97}$$

因为对于三种边界条件，均有 $u\big|_{z \in \partial D} = v\big|_{z \in \partial D} = 0$，所以：

$$\left(\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})} + \int_{S_\varepsilon(\mathbf{y})}\right)\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}S(\mathbf{z}) = 0 \tag{10.98}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，再结合 Green 第二公式，得：

$$0 - v(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x}) + 0 = 0 \iff u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y}) \iff G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x}) \tag{10.99}$$

10.5 特殊区域的 Green 函数求法以及一般有界区域的定解问题

10.5.1 镜像法

思想: 类似于电像法，$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=H(\mathbf{x},\mathbf{y})+V(\mathbf{y}-\mathbf{x})$，$G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是边界接地条件下，$\mathbf{x}$ 点的 $-\varepsilon$ 点电荷在 $\mathbf{y}$ 处产生的电势，那么 $H(\mathbf{x},\mathbf{y})=H(\mathbf{y},\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 点的 $-\varepsilon$ 点电荷在 ∂D 上引起的全部感应电荷在 $\mathbf{y}$ 点处产生的电势。

例 10.1: 上半空间的 Dirichlet 边值问题的 Green 函数。

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), & x_3,y_3>0\\ G\big|_{y_3=0}=0\end{cases}\tag{10.100}$$

解: 在一个无限大接地导体板上方点 $\mathbf{x}$ 处放置一个电量为 $-\varepsilon$ 的点电荷。为了求导体板上 $\mathbf{y}$ 处的电势分布，令电像带电 $+\varepsilon$，在下半空间的对称位置 $(\mathbf{x}^*+\mathbf{x})\in\{x_3=0\}$，则 Green 函数为:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=V(\mathbf{y}-\mathbf{x})-V(\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)=\frac{1}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}-\frac{\varepsilon}{4\pi\varepsilon|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*|}=\frac{1}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}-\frac{1}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}\tag{10.101}$$

其中 $\mathbf{x},\mathbf{x}^*$ 关于平面 $z=0$ 对称。此时:

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}\bigg|_{y_3=0}=-\frac{\partial G}{\partial y_3}\bigg|_{y_3=0}=\frac{x_3}{2\pi\left((y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}\tag{10.102}$$

注记 10.5.1: 要注意 Green 函数的归一性。

定理 10.5.1: n ($n\geqslant 2$) 维球 $B_R(\mathbf{0})$ 上的 Green 函数:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=V(\mathbf{y}-\mathbf{x})-V\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\left(\mathbf{y}-\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}\right)\right)\tag{10.103}$$

此时:

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}=\frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{n\omega_n R}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\tag{10.104}$$

即为球上的 Poisson 核。

例 10.2: 三维球的 Dirichlet 边值问题的 Green 函数。

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), & \mathbf{x},\in B_R(\mathbf{0})\\ G\big|_{r=R}=0, & r=|\mathbf{y}|\end{cases}\tag{10.105}$$

解: 令 $\rho=|\mathbf{x}|$，$\mathbf{x}^*=\frac{R^2}{\rho}\hat{\mathbf{x}}=\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}$. 那么电像:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=V(\mathbf{y}-\mathbf{x})-\frac{R}{\rho}V(\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)\tag{10.106}$$

此时:

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}\bigg|_{S_R(\mathbf{0})}=\frac{\partial G}{\partial r}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r_1}\right)\bigg|_{S_R(\mathbf{0})}=\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R r_0^3}\tag{10.107}$$

推论 10.5.1: 3 维球外问题的 Green 函数和球内的一样。

推论 10.5.2: 3 维球上的 Laplace 方程

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{0}) \\ u\big|_{S_R(\mathbf{0})} = \phi(\theta, \varphi) \end{cases} \tag{10.108}$$

的解的 **3 维 Poisson** 公式为:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R\left(R^2 - |\mathbf{x}|^2\right)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(\theta, \varphi)\sin\theta}{\left(R^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2R|\mathbf{x}|\cos\psi\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{10.109}$$

其中 ψ 为 $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{0})$ 和 $\mathbf{y} \in S_R(\mathbf{0})$ 的夹角.

例 10.3: 2 维圆盘上的 Dirichlet 边值问题 Green 函数为:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{x}^*|} \tag{10.110}$$

其中 $\mathbf{x}^* = \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}$.

例 10.4: 层状空间的 Dirichlet 边值问题的 Green 函数。

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_n^-} - \frac{1}{r_n^+}\right) \tag{10.111}$$

进行不断对称操作，使用级数求和。

10.5.2 一般有界区域上的定解问题

考虑 $\mathbb{R}^n$ 的有界子区域 D 上的热方程和波动方程:

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & \mathbf{x} \in D, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ u\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u, & \mathbf{x} \in D \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ u\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.112}$$

分离变量:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{\Delta v(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} = -\lambda \text{ 或 } \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{\Delta v(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} = -\lambda \tag{10.113}$$

代入边界条件有:

$$\begin{cases} \Delta v(\mathbf{x}) + \lambda v(\mathbf{x}) = 0, & \text{in } D \\ v\big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{10.114}$$

定理 10.5.2: Polya 猜想
在 $\mathbb{R}^N$ 中，上述特征值问题特征值满足：$\lambda_n \geqslant \left(\frac{nC_N}{|D|}\right)^{\frac{2}{N}}$，其中 $C_N = \frac{(2\pi)^N}{\omega_N}$.
1983 年丘成桐的结果：$\lambda_n \geqslant \frac{N}{N+2}\left(\frac{nC_N}{|D|}\right)^{\frac{2}{N}}$.
但对于分数阶 Laplace 算子不成立。

第十一章　空间中的波与非线性偏微分方程

11.1　三维波动方程初值问题的唯一性

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u + f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.1}$$

定理 11.1.1: 问题11.1至多有 1 个经典解，也即初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{11.2}$$

的经典解有且仅有零解。

证明: 我们考虑的问题在 $\mathbb{R}^3$ 上，不一定在紧支集上，所以不能使用 $\mathbb{R}^3$ 上的能量进行讨论，因此我们使用**局部能量**进行讨论。任意固定 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, t_0 > 0$，考虑**特征锥**：

$$C = \left\{ (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4 \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leqslant c(t_0 - t) \right\} \tag{11.3}$$

易见，$C \cap \left(\mathbb{R}^3 \times \{t\}\right) = B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}) \times \{t\}$，也即 C 与平面 $\tilde{t} = t$ 平面的截面。定义上述齐次问题在该平面上的局部能量：

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_0^{c(t_0-t)} \mathrm{d}r \iint_{S_r(\mathbf{x}_0)} \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}S \tag{11.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \iiint_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t\right) \mathrm{d}\mathbf{x} - \frac{c}{2} \iint_{S_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}S \\ &\xlongequal{\text{Green's 1st idt}} \iiint_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} u_t \left(u_{tt} - c^2\Delta u\right) \mathrm{d}\mathbf{x} + c \iint_{S_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} \left(c u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{u_t^2}{2} - \frac{c^2}{2}|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}S \\ &\leqslant \iiint_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} u_t \left(u_{tt} - c^2\Delta u\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{with Cauchy's inequality} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11.5}$$

因此能量随着 t 是单调递减的，则 $E(t) \leqslant E(0) = 0$ 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意一个球成立，所以 $u = 0, \forall B_R(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^3$，于是有且仅有零解。 □

11.2 高维偏微分方程初边值问题的唯一性以及分离变量法

11.2.1 唯一性

波动方程

对于有界区域的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u + f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in D \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}) & \\ u\big|_{\partial D} = 0 & \text{(D)} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial D} = 0 & \text{(N)} \\ \left(\sigma(\mathbf{x})u + \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\big|_{\partial D} = 0 & \text{(R)} \end{cases} \tag{11.6}$$

其中 $\sigma(\mathbf{x}) \geqslant 0$ on ∂D.

对于 3 种边界条件，分别定义能量为：

$$E_{\mathrm{D,N}}(t) = \frac{1}{2}\int_D \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{11.7}$$

$$E_{\mathrm{R}}(t) = \frac{1}{2}\int_D \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{c^2}{2}\int_{\partial D} \sigma u^2 \mathrm{d}S \tag{11.8}$$

则有：

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{D,N}}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_D u_t\left(u_{tt} - c^2\Delta u\right) \mathrm{d}\mathbf{x} + c^2\int_{\partial D} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}S \tag{11.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{R}}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_D u_t\left(u_{tt} - c^2\Delta u\right) d\mathbf{x} + c^2\int_{\partial D} u_t\left(\sigma u + \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S \tag{11.10}$$

因此，同样易证解是唯一的。

热方程

对于高维热方程，类似波动方程的情形，定义能量为：

$$E_{\mathrm{D,N}}(t) = \frac{1}{2}\int_D u^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{11.11}$$

$$E_{\mathrm{R}}(t) = \frac{1}{2}\int_D u^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + k\int_{\partial D} \sigma \int_0^t u^2 \mathrm{d}\tau \mathrm{d}S \tag{11.12}$$

则有：

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{D,N}}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_D u\left(u_t - k\Delta u\right) \mathrm{d}\mathbf{x} + k\int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}S - k\int_D |\nabla u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{11.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{D,N}}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_D u\left(u_t - k\Delta u\right) \mathrm{d}\mathbf{x} + k\int_{\partial D} u\left(\sigma u + \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S - k\int_D |\nabla u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{11.14}$$

11.2.2 分离变量法

设 $u(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x})T(t)$，与 1 维情形类似方法求解。

11.3 高维波动方程的初值问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}) & \end{cases} \tag{11.15}$$

11.3.1 3 维波动方程与 Kirchhoff 公式

思想：利用球面平均公式，化为一维问题。

任意固定 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，定义**球面平均函数**：

$$U(R,t;\mathbf{x}) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{S_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y},t)\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \tag{11.16}$$

对其求偏微分，得到 **Eule-Poisson-Darboux** 方程：

$$U_{tt} - c^2\left(U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r\right) = 0 \iff r^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U = c^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}U\right) \tag{11.17}$$

当 $n=3$ 时，由 d'Alembert 公式7.54，通解为：

$$rU = f(r+ct) + g(r-ct) \tag{11.18}$$

令 $r \to 0^+$ 得：

$$0 = f(ct) + g(-ct) \implies rU = f(r+ct) - f(ct-r) \tag{11.19}$$

因为 $\lim\limits_{r\to 0^+} U(r,t;\mathbf{x}) = u(\mathbf{x},t)$，所以：

$$u(\mathbf{x},t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(r+ct) - f(ct-r)}{r} = 2f'_+(ct) \tag{11.20}$$

对 t, r 分别微分，令 $t \to 0$ 得：

$$(rU)_r\big|_{t=0} = f'(r) + f'(-r) \tag{11.21}$$

$$(rU)_t\big|_{t=0} = cf'(r) - cf'(-r) \tag{11.22}$$

$$\implies 2f'(r) = \frac{1}{r}(rU)_t\big|_{t=0} + (rU)_r\big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r}\oiint_{S_r(\mathbf{x})} u_t(\mathbf{y},0)\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r}\oiint_{S_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y},0)\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right) \tag{11.23}$$

因此，$n=3$ 时，方程11.15的解为：

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\oiint_{S_{ct}(\mathbf{x})} \psi(y)\mathrm{d}S(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\oiint_{S_{ct}(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right) \tag{11.24}$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi\left(\mathbf{y}\left(ct,\theta,\phi\right)\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi\left(\mathbf{y}\left(ct,\theta,\phi\right)\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right) \tag{11.25}$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\oiint_{S_{ct}(\mathbf{x})} \left(t\psi + \varphi + ct\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S \tag{11.26}$$

$$= ⨏_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} \left(t\psi + \varphi + ct\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S \tag{11.27}$$

也即 **Kirchhoff 公式**。

11.3.2 2 维波动方程与降维法

考虑 2 维波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}),\ u_t\big|_{t=0=\psi(\mathbf{x})} \end{cases} \tag{11.28}$$

考虑上述方程对应的 $n=3$ 时的方程的与 x_3 无关的解在 $n=2$ 的平面上的投影。

令 $\Sigma_{ct}(x_1,x_2)=\left\{(\xi,\eta)\,\middle|(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2\leqslant(ct)^2\right\}$ 为圆盘。考虑以 Σ_{ct} 为投影的上、下球面：

$$S^{\pm}_{ct}(\mathbf{x})=\left\{(\xi,\eta,\zeta)\,\middle|\xi=\pm\sqrt{(ct)^2-r^2}+x_3, r=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2},(\xi,\eta)\in\Sigma_{ct}(x_1,x_2)\right\} \tag{11.29}$$

对于一个 $\mathbb{R}^2$ 中的函数 $g(x_1,x_2)$，将其**视作** $\mathbb{R}^3$ 上的函数，则有：

$$\begin{aligned}\iint_{S^+_{ct}}\frac{g(\xi,\eta)}{4\pi c^2t}\mathrm{d}S=&\frac{1}{4\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{g(\xi,\eta)}{ct}\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ =&\frac{1}{4\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2-(\xi-x_1)^2-(\xi-x_2)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{11.30}$$

因为 $g(x_1,x_2)$ 与 x_3 无关，所以由对称性得：

$$\iint_{S_{ct}(\mathbf{x})}\frac{g}{4\pi c^2t}\mathrm{d}S=\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2-(\xi-x_1)^2-(\eta-x_2)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{11.31}$$

于是，由 Kirchhoff 公式，将方程11.28视作 3 维情形在 $\mathbb{R}^2$ 上的投影，解为：

$$u(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{(ct)^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}+\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{\varphi(\mathbf{y})}{\sqrt{(ct)^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{11.32}$$

$$=\frac{1}{2\pi c}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\frac{\psi\left(\mathbf{y}(r,\theta)\right)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r+\frac{1}{2\pi c}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi\left(\mathbf{y}(ctz,\theta)\right)ctz}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{11.33}$$

$$=\frac{1}{2\pi ct}\iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{t\psi+\varphi+|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}}{\sqrt{(ct)^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{11.34}$$

$$=\frac{ct}{2}⨍_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})}\frac{t\psi+\varphi+|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}}{\sqrt{(ct)^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{11.35}$$

也即 2 维波动方程的 **Poisson 公式**。

11.3.3 非齐次问题

考虑 3 维非齐次初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=f(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(\mathbf{x}),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.36}$$

由 Duhamel 原理以及 Kirchhoff 公式，上述问题的解为：

$$u(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi c^2t}\oiint_{S_{ct}(\mathbf{x})}\psi(y)\mathrm{d}S(\mathbf{y})+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\oiint_{S_{ct}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right) \tag{11.37}$$

$$+\int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-\tau)} \oiint_{S_{c\tau}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y},\tau)\mathrm{d}S(\mathbf{y})\mathrm{d}\tau \tag{11.38}$$

$$=\frac{1}{4\pi c^2 t^2} \oiint_{S_{ct}(\mathbf{x})} \left(t\psi + \varphi + ct\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi c^2} \iiint_{B_{ct}(\mathbf{x})} \frac{f\left(\mathbf{y}, t-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{11.39}$$

其中，第 3 项称作**延迟势**。

类似地，2 维非齐次初值问题的解为：

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{(ct)^2 - |\xi-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{ct}(\mathbf{x})} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{(ct)^2 - |\xi-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\xi \tag{11.40}$$

$$+\frac{1}{2\pi c^2}\int_0^t \iint_{\Sigma_{c(t-\tau)}(\mathbf{x})} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |\xi-\mathbf{x}|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{11.41}$$

11.4 高维热方程以及薛定谔方程

11.4.1 3 维热方程

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.42}$$

n 维热核为：

$$K(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4kt}\right) \tag{11.43}$$

其满足：

$$\begin{cases} K_t = k\Delta K, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ K\big|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.44}$$

那么 3 维热方程的解为：

$$u(\mathbf{x},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\varphi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{y})\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4kt}\right)\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{11.45}$$

对于非齐次 n 维热方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u + + f(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.46}$$

相应地，由热核和 Duhamel 原理，解为：

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\varphi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)f(\mathbf{y},\tau)\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\tau \tag{11.47}$$

11.4.2 薛定谔方程

$$\begin{cases} -\mathrm{i}u_t = \frac{1}{2}\Delta u. & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.48}$$

等价化为：

$$u_t = \frac{\mathrm{i}}{2}\Delta u \tag{11.49}$$

利用热核，得：

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i} t)^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{11.50}$$

11.5 Fourier 变换法

思想：将微分方程转化为代数方程。

定义 11.5.1: Fourier 变换

对 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义 Fourier 变换：

$$F[f(\mathbf{x})](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{x}\cdot\xi} \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{11.51}$$

以及逆变换：

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \tag{11.52}$$

Fourier 变换的性质：

1. 线性性：$\widehat{c_1 f + c_2 g} = c_1 \widehat{f} + c_2 \widehat{g}$.
2. 共轭性 (对于实函数)：$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.
3. 微分：$\widehat{\mathcal{D}^\alpha f}(\xi) = \mathrm{i}^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$.
4. 幂乘：$\widehat{\mathbf{x}^\alpha f} = \mathrm{i}^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha \widehat{f}$.
5. 平移性：$\widehat{f_{(x-x_0)}}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{x}_0\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)$.
6. 相似性：$\widehat{f_{(a\mathbf{x})}}(\xi) = |a|^{-n} \widehat{f}(a^{-1}\xi)$.
7. 卷积：$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

利用 Fourier 变换，可以求解高维波动方程和热方程的初 (边) 值问题。

11.5.1 波动方程

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的齐次波动方程11.15。假设 φ, ψ 具有良好性质，于是在 Fourier 变换下：

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + c^2|\mathbf{y}|^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}\big|_{t=0} = \hat{\varphi},\ \hat{u}_t\big|_{t=0} = \hat{\psi} \end{cases} \tag{11.53}$$

解得：

$$\hat{u} = \begin{cases} \hat{\psi}t + \hat{\varphi}, & \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \hat{\varphi}\cos(c|\mathbf{y}|t) + \frac{1}{c|\mathbf{y}|}\hat{\psi}\sin(c|\mathbf{y}|t), & \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \end{cases} \tag{11.54}$$

那么：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) =& \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{\varphi}\cos(c|\mathbf{y}|t) + \frac{1}{c|\mathbf{y}|}\hat{\psi}\sin(c|\mathbf{y}|t)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} \mathrm{d}\mathbf{y} \\ =& \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{\varphi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(c|\mathbf{y}|t+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-c|\mathbf{y}|t+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})}}{2} + \frac{\hat{\psi}}{c|\mathbf{y}|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(c|\mathbf{y}|t+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-c|\mathbf{y}|t+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})}}{2\mathrm{i}}\right) \mathrm{d}\mathbf{y} \end{aligned} \tag{11.55}$$

定理 11.5.1: 能量均分原理

对于高维齐次波动方程11.15，设 φ, ψ 具有紧支集，则动能 $K(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 \mathrm{d}\mathbf{x}$ 和势能 $P(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} c^2|\nabla u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}$ 当 $t \to +\infty$ 时趋于相等。

证明: 一方面，因为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} =&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u\cdot\nabla u_t\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\\
=&\int_{\mathbb{R}^n} u_t\left(u_{tt} - c^2\Delta u\right)\mathrm{d}\mathbf{y} + c^2\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R(\mathbf{0})} u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}S\\
=&0
\end{aligned}
\tag{11.56}
$$

所以能量守恒，也即:

$$
E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\psi^2 + c^2|\nabla\varphi|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\hat{\psi}|^2 + c^2|\mathbf{y}|^2|\hat{\varphi}|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{y}
\tag{11.57}
$$

另一方面，由 Parseval 等式和 Riemann-Lebesgue 引理，对于 $P(t)$ 有:

$$
\begin{aligned}
&\frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\\
=&\frac{c^2}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\nabla u}|^2\mathrm{d}\mathbf{y}\\
=&\frac{c^2}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbf{y}|^2|\hat{u}|^2\mathrm{d}\mathbf{y}\\
=&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{c^2|\mathbf{y}|^2}{2}|\hat{\varphi}|^2\cos^2(c|\mathbf{y}|t) + \frac{|\hat{\psi}|^2}{2}\sin^2(c|\mathbf{y}|t) + c|\mathbf{y}|\frac{\hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}} + \overline{\hat{\varphi}}\hat{\psi}}{2}\sin(c|\mathbf{y}|t)\cos(c|\mathbf{y}|t)\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\triangleq&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{c^2|\mathbf{y}|^2(\cos(2c|\mathbf{y}|t)+1)}{4}|\hat{\varphi}|^2 + \frac{1-\cos(2c|\mathbf{y}|t)}{4}|\hat{\psi}|^2 + f(\mathbf{y})\sin(2c|\mathbf{y}|t)\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\to&\frac{1}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{c^2|\mathbf{y}|^2|\hat{\varphi}|^2}{2} + \frac{|\hat{\psi}|^2}{2}\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\quad(t\to+\infty)\\
=&\frac{1}{2}E(0)
\end{aligned}
\tag{11.58}
$$

因此，当 $t \to +\infty$ 时，动能和势能趋于相等。 □

11.5.2 热方程

例 11.1: 求解方程:

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} - xu_x\\
u\big|_{t=0} = \varphi
\end{cases}
\tag{11.59}
$$

解: 假设 φ 性质良好，在 Fourier 变换下:

$$
\begin{cases}
\hat{u}_t = \left(1-\xi^2\right)\hat{u} + \xi\hat{u}_\xi\\
\hat{u}\big|_{t=0} = \hat{\varphi}
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\xi \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\hat{u}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\hat{u}\right)\\
\xi \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\hat{u}\big|_{t=0} = \xi \mathrm{e}^{-\frac{\xi}{2}}\hat{\varphi}
\end{cases}
\tag{11.60}
$$

解得：

$$\xi \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \hat{u} = (t+\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(t+\xi)^2}{2}} \hat{\varphi}(t+\xi) \iff \hat{u}(\xi, t) = \frac{t+\xi}{\xi} \mathrm{e}^{\frac{-t^2+2t\xi}{2}} \hat{\varphi}(t+\xi) \tag{11.61}$$

于是，原方程的解为：

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t+\xi}{\xi} \mathrm{e}^{\frac{-t^2+2t\xi}{2}} \hat{\varphi}(t+\xi) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t+\xi}{\xi} \mathrm{e}^{\frac{-t^2+2t\xi}{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t+\xi)} \mathrm{d}s \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi \tag{11.62}$$